

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA ELETRICA †

UM IDENTIFICADOR RÁPIDO PARA SISTEMAS LINEARES  
DISCRETOS PARA CONTROLE ADAPTATIVO INDIRETO

TESE SUBMETIDA À UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA  
PARA A OBTENÇÃO DO GRAU DE MESTRE EM ENGENHARIA ELÉTRICA

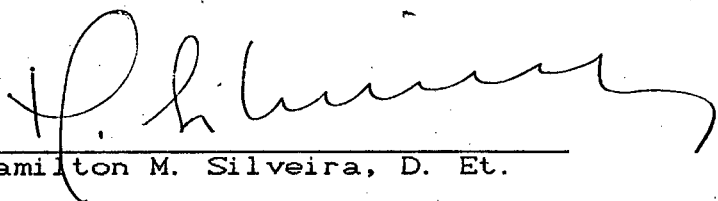
PAULO ROBERTO ZARDO

FLORIANÓPOLIS, SETEMBRO DE 1993

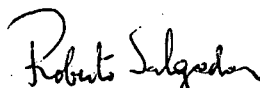
UM IDENTIFICADOR RÁPIDO PARA SISTEMAS LINEARES  
DISCRETOS PARA CONTROLE ADAPTATIVO INDIRETO

Paulo Roberto Zardo

ESTA DISSERTAÇÃO FOI JULGADA PARA A OBTENÇÃO DO TÍTULO DE MESTRE  
EM ENGENHARIA - ESPECIALIDADE ELÉTRICA - E APROVADA EM SUA FORMA  
FINAL PELO CURSO DE PÓS-GRADUAÇÃO.

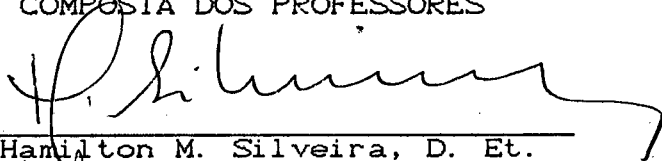


Prof. Hamilton M. Silveira, D. Et.



Prof. Roberto de Souza Salgado, Ph.D.  
Coordenador do Curso de Pós-  
Graduação em Eng. Elétrica.

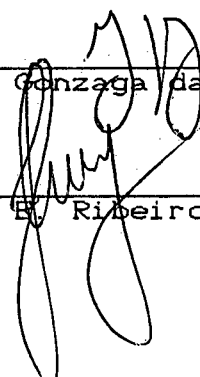
APROVADA PERANTE A BANCA EXAMINADORA COMPOSTA DOS PROFESSORES



Prof. Hamilton M. Silveira, D. Et.



Prof. Nelson Zeni Jr, M. E.



Prof. Luiz Gonzaga da Fonseca, D.Sc.

Prof. José B. Ribeiro Cury, D. Etat.

À minha família.

## AGRADECIMENTOS

Ao Prof. Hamilton Medeiros Silveira cujo inestimável apoio e colaboração tornaram possível a execução deste trabalho.

À todos os professores e colegas do Pós-Graduação que, de um modo ou de outro, contribuíram para a minha evolução técnica e pessoal.

À Pontifícia Universidade Católica do Rio Grande do Sul e a CAPES pelo apoio financeiro.

Ao secretário do Curso de Pós-Graduação da Eng. Elétrica da UFSC, Wilson Silva Costa pelo apoio no desembaraço de vários tramites burocráticos.

À Universidade Federal de Santa Catarina, pelo apoio técnico.

Aos meus pais pelo apoio, incentivo e confiança incondicionais.

## RESUMO

Este trabalho é um estudo de um identificador rápido para sistemas lineares, discretos e não perturbados, determinística ou estocasticamente. A rapidez de identificação é devida ao fato do sistema não ser perturbado, e portanto requerer um número finito de iterações para a identificação, teoricamente igual ao número de parâmetros a identificar. O trabalho apresenta também vários casos que foram simulados para comprovar o desempenho do identificador.

Este identificador é aplicado a um sistema adaptativo indireto. Após o desenvolvimento teórico do sistema adaptativo, várias situações são abordadas por simulação, como por exemplo processos estáveis e instáveis, com bons resultados.

## ABSTRACT

This work is a study for a identifier for a discrete linear system with no perturbation, deterministic or stocastelly. The fastest identification is because the system has no perturbation, an so on it requires a finite number of interactions to the identification, that theoretically is equal the number of parameters to be identified. The work also showed several cases that was simulated to prove the performance of the identifier.

This identifier is applied to an adaptive system. After the theoretical development of the adaptive system, several situations are simulated, for example steady state and transient process, with good results.

## SUMARIO

### CAPÍTULO 1 - INTRODUÇÃO

1.1 - Introdução.....	1
1.2 - Objetivos e limites do trabalho proposto.....	3

### CAPÍTULO 2 - O CONTROLADOR NAO-ADAPTATIVO

2.1 - Introdução.....	7
2.2 - Formulação matemática.....	9
2.2.1 - Erro em regime permanente.....	9
2.2.2 - Cálculo dos parâmetros do controlador a partir dos parâmetros do processo.....	12
2.3 - Estudo de casos.....	18
2.4 - Conclusões.....	36

### CAPÍTULO 3 - O IDENTIFICADOR

3.1 - Introdução.....	37
3.2 - Desenvolvimento matemático.....	40
3.3 - Estudo de casos.....	50
3.4 - Conclusões.....	60

## CAPÍTULO 4 - O SISTEMA ADAPTATIVO

4.1 - Introdução.....	62
4.2 - O mecanismo de ajuste.....	64
4.3 - Estudo de casos.....	68
4.4 - Conclusões.....	84

## CAPÍTULO 5 - CONCLUSÕES

5.1 - Conclusões.....	85
5.2 - Sugestões para futuros trabalhos.....	87

ANEXO 1.....	89
ANEXO 2.....	96
ANEXO 3.....	103
BIBLIOGRAFIA.....	137



## CAPITULO I - INTRODUCAO

### 1.1 - INTRODUCAO

Desde que o ser humano tomou consciência de si mesmo e do meio que o cerca, ele vem tentando conhecer e dominar o ambiente em que vive. Com o decorrer do tempo ele começou a construir máquinas que permitiram alterar não só o meio ambiente como a si próprio. A evolução natural destas máquinas foram as máquinas automaticamente controladas, como por exemplo a construída por James Watt no século XVIII, a qual era um controlador centrífugo para controle de velocidade de uma máquina a vapor [19].

Os primeiros mecanismos de controle automático, foram desenvolvidos calcados mais em procedimentos heurísticos do que em sólidas bases científicas. Entretanto, a medida em que a complexidade dos sistemas automáticos de controle foi crescendo, tornou-se necessário o desenvolvimento de ferramentas matemáticas que permitissem a previsão do resultado das variáveis controladas. Assim, foram surgindo várias técnicas matemáticas e computacionais que tornaram possível não só a previsão do tipo de resposta a ser obtida, como também a rejeição de determinados tipos de distúrbios. O esquema básico destes tipos de controladores automáticos é dado na figura 1.1 e em 1934, Hazen introduziu o termo "servomecanismos", para sistemas de controle de posição [19] com estrutura semelhante.

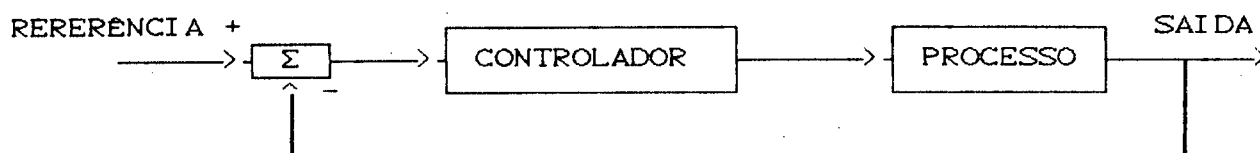


Fig. 1.1 - Esquema básico de um sistema de controle automático.

Os servomecanismos representados pela figura 1.1, tem como característica principal o fato de que a saída segue determinadas referências, além da rejeição de certos distúrbios, que afetam os sinais existentes dentro da malha fechada [19]. Todavia, distúrbios estruturais como a variação dos parâmetros do processo, não são rejeitados por este tipo de estrutura. Assim, surgiu a necessidade de desenvolver novas estruturas de sistemas de controle, que permitissem compensar variações estruturais imprevisíveis no processo a ser controlado.

Nos sistemas automáticos de controle representados pela figura 1.1, a ordem do controlador bem como o valor dos respectivos coeficientes, depende do grau e do valor dos coeficientes dos polinômios que representam a função de transferência do processo.<sup>1</sup> Se o processo muda, também deve mudar a função de transferência do controlador, de tal forma que o desempenho do sistema permaneça a mesmo.

Partindo desta idéia, pode-se criar um mecanismo que identifique permanentemente a função de transferência do processo.

<sup>1</sup>Embora não tenha sido mencionado até o momento, fica subentendido que a abordagem deste trabalho será no domínio da frequência.

A partir dos novos parâmetros identificados, pode-se ADAPTAR a função de transferência do controlador ao novo processo, mantendo assim o mesmo padrão de desempenho do sistema. Um diagrama básico para este tipo de estrutura pode ser visto na figura 1.2.

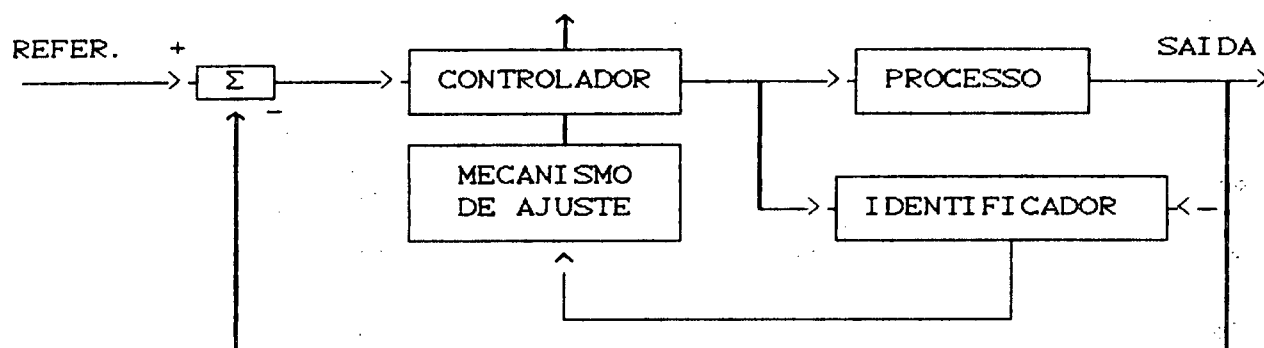


Fig. 1.2 - Esquema básico do sistema adaptativo.

Embora existam vários outros tipos de sistemas adaptativos, o sistema acima é atraente dada a simplicidade da idéia, ou seja, monitoram-se os parâmetros do processo e modificam-se os parâmetros do controlador a medida em que os parâmetros do processo forem mudando. O esquema da Figura 1.2 é chamado de sistema de controle adaptativo indireto [2] ou auto-ajustável [2,3]. Neste tipo de sistema adaptativo é feita uma identificação explícita dos parâmetros do processo. Os parâmetros identificados entram no mecanismo de ajuste, que por sua vez modifica os parâmetros do controlador.

## 1.2 - OBJETIVOS E LIMITACOES DO TRABALHO PROPOSTO

O principal objetivo deste trabalho é propor um identificador rápido, em ausência de ruído, que consiga

identificar o processo em um número finito de iterações. Como complemento ao objetivo principal é proposto um controlador adaptativo indireto. Vários casos são estudados tanto na identificação como no controle não-adaptativo (esquema da figura 1.1) e adaptativo (esquema da figura 1.2).

No capítulo 1 é feita uma introdução descrevendo brevemente o assunto da dissertação, seus objetivos e limites.

No capítulo 2 é estudado o controlador não-adaptativo, o qual serve de base para a estrutura do sistema adaptativo. São estudados vários casos com processos de fase mínima e não-mínima, estáveis e instáveis. Neste capítulo também é apresentado o desenvolvimento de um algoritmo para calcular os parâmetros do controlador diretamente a partir dos parâmetros do processo. Este algoritmo é baseado no algoritmo apresentado por C. T. Chen [20], que demonstra que os parâmetros do controlador podem ser encontrados solucionando-se um sistema de equações algébricas lineares.

No capítulo 3 apresenta-se o identificador, juntamente com um algoritmo recursivo e alguns exemplos. O algoritmo de identificação é construído a partir da solução de um sistema de equações lineares. A solução deste sistema é baseada no método das direções conjugadas apresentado por Luemberg [22]. Este método é originalmente aplicado a problemas de minimização da equação quadrática  $0.5 \mathbf{x}^T \mathbf{Q} \mathbf{x} - \mathbf{b}^T \mathbf{x}$ , sendo que resolver o problema da

minimização é equivalente a resolver o sistema de equações lineares  $Qx = b$ , assim pode-se utilizar o método das direções conjugadas para solucionar o sistema e encontrar os parâmetros do processo em um número finito de iterações.

Os casos estudados mostram a relação entre os sinais de entrada e saída do processo e a sua identificação. Os sinais de entrada utilizados neste trabalho foram do tipo pseudo-aleatório e/ou degrau.

No capítulo 4 são apresentados alguns exemplos com o sistema adaptativo, onde pode-se observar o desempenho do sistema como um todo.

Finalmente, no capítulo 5 são feitas considerações conclusivas, sobre o desempenho de cada uma das partes e do conjunto.

Para o desenvolvimento teórico do trabalho, assumiram-se as seguintes características:

1. O processo é linear, controlável e observável, ou seja, não existem pólos e zeros se cancelando mutuamente.

2. A variação dos parâmetros do processo é discreta no tempo, isto é, os parâmetros passam de valores constantes para outros valores constantes, permanecendo na nova posição por um certo número de iterações.

3. O sistema é não-perturbado, determinística ou estocasticamente.

Pelos resultados apresentados nas simulações executadas durante o desenvolvimento deste trabalho, pode-se afirmar que o esquema de identificação é bastante útil e pode ser usado em esquemas de controle adaptativo, não só como o aqui desenvolvido, mas também em sistemas adaptativos com outros tipos de estrutura.

## CAPITULO 2 - O CONTROLADOR NAO-ADAPTATIVO

### 2.1 - INTRODUCAO

Neste capítulo vai-se apresentar um controlador clássico sem o mecanismo de adaptação, para sistemas lineares, discretos e completamente controláveis e observáveis. Este sistema é um servomecanismo que como será visto, pode ser considerado um sistema de controle robusto [1]. O desenvolvimento matemático deste controlador, servirá de base para a definição do controlador adaptativo que será apresentado no capítulo 4.

Os parâmetros do controlador dependem dos parâmetros do processo; assim o sistema adaptativo vai utilizar a mesma estrutura do sistema não-adaptativo, com a diferença que no sistema adaptativo, os parâmetros do controlador são ajustados pelo mecanismo de ajuste.

Para definir o tipo de controlador a ser utilizado, deve-se primeiro definir quais são as características mais importantes do sistema controlado:

1. Erro em regime permanente igual a zero para uma entrada tipo degrau. Esta é a característica mais importante do erro em regime permanente.

2. Erro em regime permanente com valor finito, provavelmente diferente de zero, para uma entrada tipo rampa.

3. Os pólos da equação característica da função de transferência em malha fechada (FTMF) deverão estar na região de estabilidade do plano complexo. Preferencialmente estes pólos devem ser colocados em qualquer parte da região de estabilidade do plano complexo, para poder satisfazer qualquer critério de localização de pólos para a FTMF.

4. Satisfazer o item 3 sem a necessidade de calcular os pólos e zeros do processo.<sup>1</sup>

Para satisfazer as condições acima vai-se propor e estudar o sistema mostrado na figura 2.1. Este é um sistema de controle clássico, onde [1]  $C2(z)$  é um servocompensador utilizado para controlar o erro em regime permanente, e  $C1(z)$  é um compensador estabilizante utilizado para tornar o sistema assintoticamente estável.

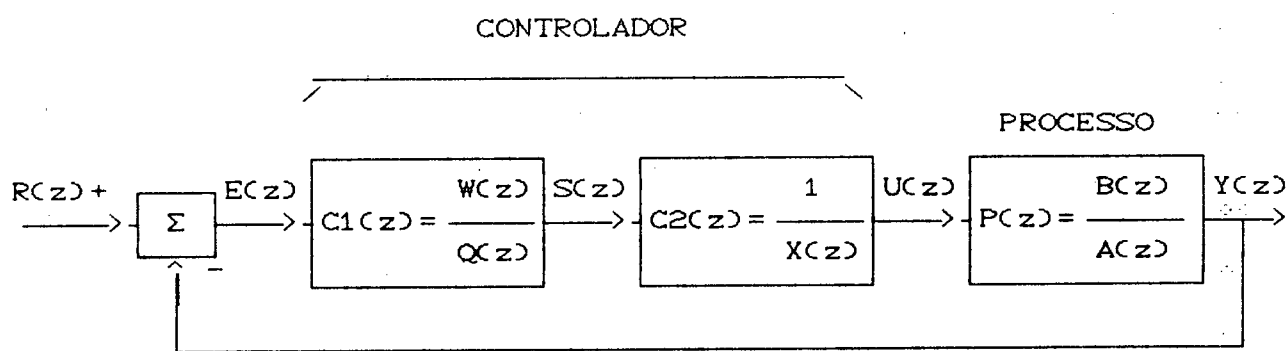


Fig. 2.1 - Controlador nao-adaptativo proposto.

Neste trabalho, vai-se considerar que um sistema é

<sup>1</sup>O identificador fornece a função de transferência na forma de polinômios em potências de  $z$ , como pode ser visto no capítulo 3.



robusto, se a saída do mesmo consegue convergir assintoticamente para a referência, mesmo na presença de pequenos distúrbios estruturais. Nos últimos anos vários trabalhos, [3,4,7,9,10,13] entre outros, tem sido apresentados tratando da estabilidade robusta. Estes trabalhos tratam de como pequenas perturbações estruturais são mapeadas no plano complexo para a análise da estabilidade. Este tópico está fora dos objetivos do presente texto, e é deixado como sugestão para futuros trabalhos.

## 2.2 - FORMULACAO MATEMATICA

Neste item vai-se demonstrar matematicamente como as características mais importantes do sistema podem ser satisfeitas a partir do projeto do controlador. A primeira demonstração está relacionada com o erro em regime permanente. Em seguida demonstra-se como encontrar os parâmetros do controlador, como função dos parâmetros do processo.

### 2.2.1 - ERRO EM REGIME PERMANENTE

A partir da figura 2.1 pode-se encontrar a seguinte equação de erro, onde os diversos polinômios são escritos em potências de  $z^{-1}$ .

$$E(z) = \frac{Q(z)X(z)A(z)}{Q(z)X(z)A(z) + W(z)z^{-1}B(z)} R(z) \quad (2-1)$$

O polinômio  $X(z)$  pertence ao bloco do servocompensador e portanto cabe a ele eliminar o erro em regime permanente. Observando a equação (2-1) pode-se perceber que para o erro ir para zero, é necessário que o polinômio  $X(z)$  aplicado à entrada  $R(z)$  resulte também no valor zero, e ainda é necessário que o sistema como um todo seja estável [1].

Para que o polinômio  $X(z)$  anule a entrada [1] é necessário que o mesmo possua os mesmos modos (raízes) do sinal  $R(z)$ . Assim tem-se

#### 1. Entrada tipo degrau

$$r(t) = C \text{ (degrau de amplitude } C)$$

$$R(z) = C / (1 - z^{-1})$$

$$X(z) = (1 - z^{-1})$$

$$\begin{aligned} X(z)r(k) &= (1 - z^{-1})r(k) = r(k) - r(k-1) \\ &= C - C = 0 \end{aligned}$$

#### 2. Entrada tipo rampa

$$r(t) = C t$$

$$R(z) = CTz^{-1} / (1 - z^{-1})^2$$

$$X(z) = (1 - z^{-1})^2 = 1 - 2z^{-1} + z^{-2}$$

$$\begin{aligned} X(z)r(k) &= (1 - 2z^{-1} + z^{-2})r(k) = \\ &= r(k) - 2r(k-1) + r(k-2) = \\ &= Ck - 2C(k-1) + C(k-2) = \\ &= Ck - 2Ck + 2C + Ck - 2C = 0 \end{aligned}$$

O objetivo a ser alcançado é o erro igual a zero em

regime permanente para uma entrada tipo degrau, portanto o polinômio  $X(z)$  é  $(1-z^{-1})$ .

Este mesmo problema de erro em regime permanente, pode ser abordado [19] pelo teorema do valor final (anexo 1). Considere ainda a equação (2-1) com  $X(z) = (z-1)$  e os diversos polinômios escritos em potências de  $z$ . O erro em regime permanente pode ser calculado como segue:

#### ERRO AO DEGRAU

$$Ess = \lim_{z \rightarrow 1} (z-1) \frac{Q(z)(z-1)A(z)}{Q(z)(z-1)A(z) + W(z)zB(z)} \frac{C}{(z-1)} = 0 \quad (2-2)$$

#### ERRO A RAMPA

$$Ess = \lim_{z \rightarrow 1} (z-1) \frac{Q(z)(z-1)A(z)}{Q(z)(z-1)A(z) + W(z)zB(z)} \frac{TCz}{(z-1)^2} = \text{Constante}$$

Todas as equações de erro, acima, são válidas desde que o sistema como um todo seja assintoticamente estável. A estabilidade assintótica está dentro das características mais importantes do sistema, e vai ser demonstrada matematicamente no item 2.2.2.

A partir da equação (2-2), pode-se perceber que o erro em regime permanente, para uma entrada tipo degrau, independe dos parâmetros do controlador estabilizante e do processo. Desde que o

sistema seja assintoticamente estável e que  $C2(z)$  não sofra perturbações estruturais, o erro em regime permanente vai para zero, fato que caracteriza este sistema como um sistema robusto para uma entrada tipo degrau [1]. Esta consideração é válida desde que não haja nenhum zero da função de transferência em malha aberta sobre o ponto  $(1+j0)$ .

### 2.2.2 - CALCULO DOS PARAMETROS DO CONTROLADOR A PARTIR DOS PARAMETROS DO PROCESSO.

O procedimento utilizado neste trabalho, para calcular os parâmetros do controlador como função dos parâmetros do processo, é baseado em um algoritmo apresentado por C. T. Chen [20] para sistemas lineares contínuos. Embora existam muitos outros tipos de controladores, o controlador proposto é interessante, pois ele necessita apenas dos coeficientes (parâmetros) dos polinômios do processo, dispensando o cálculo dos pólos e zeros do mesmo.

Considere a figura 2.2 onde todos os polinômios são escritos em potências de  $z$ .

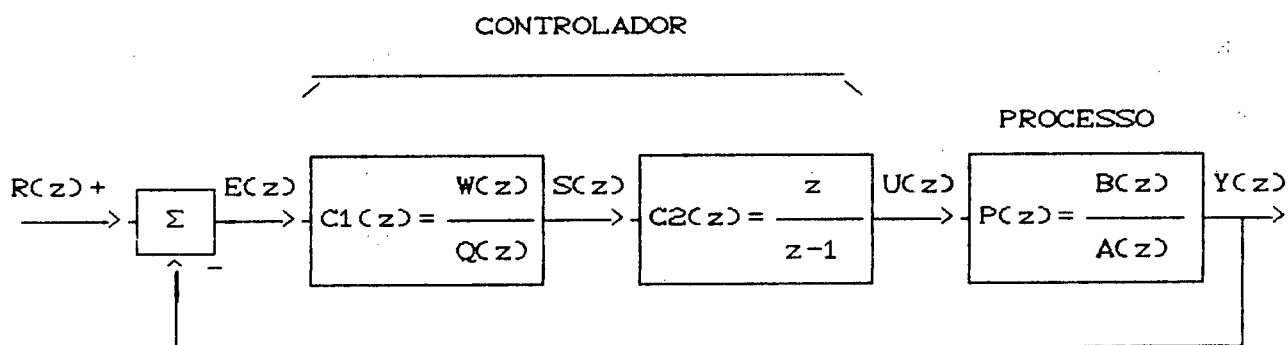


Fig. 2.2 - Controlador nao-adaptativo proposto, com polinomios em potencias de  $z$ .

Os diversos polinômios do sistema da figura 2.2 são das seguintes dimensões:

$$\begin{aligned} W(z) &= w_1 z^n + w_2 z^{n-1} + \dots + w_{n+1} \\ Q(z) &= z^{n+1} + q_1 z^n + \dots + q_{n+1} \\ B(z) &= b_1 z^{n-1} + b_2 z^{n-2} + \dots + b_n \\ A(z) &= z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_n \end{aligned} \quad (2-3)$$

Assume-se que os coeficientes  $a_i$  e  $b_i$  dos polinômios  $A(z)$  e  $B(z)$  são diferentes de zero.<sup>2</sup>

Como os parâmetros do servocompensador já foram determinados, o que vai-se determinar agora são os parâmetros do compensador estabilizante. Para tal, vai-se considerar que o servocompensador e o processo formam um "processo aumentado" [1], a partir do qual os parâmetros do compensador estabilizante são calculados.

Seja  $F(z)$  a equação característica desejada para a função de transferência em malha fechada (FTMF).

$$F(z) = z^{2(n+1)} + f_1 z^{2(n+1)-1} + \dots + f_{2(n+1)} \quad (2-4)$$

Seja  $D(z)$  a equação característica da FTMF.

$$D(z) = z^{2(n+1)} + d_1 z^{2(n+1)-1} + \dots + d_{2(n+1)} \quad (2-5)$$

---

<sup>2</sup>Os motivos a esta restrição podem ser vistos nas páginas 17 e 18.

A FTMF do sistema representado pela figura 2.2 é

$$\frac{Y(z)}{R(z)} = \frac{W(z)zB(z)}{Q(z)(z-1)A(z) + W(z)zB(z)} = \frac{N(z)}{D(z)} \quad (2-6)$$

Assim, pode-se escrever  $D(z)$  como abaixo.

$$D(z) = Q(z)(z-1)A(z) + W(z)zB(z) \quad (2-7)$$

Calculando os parâmetros  $d_1, d_2, \dots, d_{2(n+1)}$  conforme a equação (2-7), e comparando a equação (2-5) com a equação (2-4), chega-se a um sistema linear de equações algébricas que pode ser resolvido facilmente. Assim, tem-se

$$P_p \cdot p_c = f_d \quad (2-8)$$

onde

$$m = 2(n+1)$$

$P_p$  de dimensão  $(m \times m)$ , é a matriz dos parâmetros do processo,

$p_c$  de dimensão  $(m \times 1)$ , é o vetor dos parâmetros do controlador,

$f_d$  de dimensão  $(m \times 1)$ , é o vetor dos parâmetros da equação característica desejada da FTMF junto com parâmetros do processo,

$$P_p = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \alpha_1 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & b_1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \alpha_2 & \alpha_1 & 1 & 0 & \dots & 0 & b_2 & b_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \alpha_3 & \alpha_2 & \alpha_1 & 1 & \dots & 0 & b_3 & b_2 & b_1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_n & \alpha_{n-1} & \alpha_{n-2} & \alpha_{n-3} & \dots & 1 & b_n & b_{n-1} & b_{n-2} & b_{n-3} & \dots & b_1 \\ \alpha_{n+1} & \alpha_n & \alpha_{n-1} & \alpha_{n-2} & \dots & \alpha_1 & 0 & b_n & b_{n-1} & b_{n-2} & \dots & b_2 \\ 0 & \alpha_{n+1} & \alpha_n & \alpha_{n-1} & \dots & \alpha_2 & 0 & 0 & b_n & b_{n-1} & \dots & b_3 \\ 0 & 0 & \alpha_{n+1} & \alpha_n & \dots & \alpha_3 & 0 & 0 & 0 & b_n & \dots & b_4 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha_{n+1} & \dots & \alpha_4 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & b_5 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \alpha_{n+1} & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix},$$

$$p_c = \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ \vdots \\ q_{n+1} \\ w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_{n+1} \end{bmatrix},$$

$$f_d = \begin{bmatrix} f_1 - a_1 + a_0 \\ f_2 - a_2 + a_1 \\ \vdots \\ f_{n+1} - a_{n+1} + a_n \\ f_{n+2} \\ f_{n+3} \\ \vdots \\ f_{2(n+1)} \end{bmatrix}, \quad \begin{aligned} \therefore a_0 &\hat{=} 1 \\ a_{n+1} &\hat{=} 0 \end{aligned}$$

onde

$$\alpha_1 = a_1 - 1,$$

$$\alpha_2 = a_2 - a_1,$$

$$\alpha_3 = a_3 - a_2,$$

$\vdots$

$$\alpha_{n+1} = -a_n.$$

É interessante notar como fica o sistema da equação (2-8) para processos de primeira e segunda ordem:

Primeira ordem

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ a_1 - 1 & 1 & b_1 & 0 \\ -a_1 & a_1 - 1 & 0 & b_1 \\ 0 & -a_1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ w_1 \\ w_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1 - a_1 + 1 \\ f_2 + a_1 \\ f_3 \\ f_4 \end{bmatrix} \quad (2-9)$$

Segunda ordem

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a_1 - 1 & 1 & 0 & b_1 & 0 & 0 \\ a_2 - a_1 & a_1 - 1 & 1 & b_2 & b_1 & 0 \\ -a_2 & a_2 - a_1 & a_1 - 1 & 0 & b_2 & b_1 \\ 0 & -a_2 & a_2 - a_1 & 0 & 0 & b_2 \\ 0 & 0 & -a_2 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \\ w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1 - a_1 + 1 \\ f_2 - a_2 + a_1 \\ f_3 + a_2 \\ f_4 \\ f_5 \\ f_6 \end{bmatrix} \quad (2-10)$$

Para calcular os parâmetros do controlador como função dos parâmetros do processo e da localização desejada dos pólos da FTMF segue-se a sequência abaixo:

1. Determina-se  $F(z)$  a partir da localização desejada das raízes da equação característica da FTMF. A partir dos parâmetros da  $F(z)$  e do processo forma-se o vetor  $f_d$ .

2. Forma-se a matriz  $P_p$  a partir dos parâmetros do processo.

3. Soluciona-se o sistema da equação (2-8) para encontrar os parâmetros do controlador através da inversão de  $P_p$ .



Como pode-se observar pelo item 3 da sequência acima é necessário solucionar um sistema linear de equações algébricas para determinar os parâmetros do controlador. Cabe aqui, então, uma discussão sobre a solubilidade do sistema da equação (2-8).

Para que o sistema da equação (2-8) tenha solução é necessário que o posto da matriz  $P_p$  seja igual ao posto da matriz  $P_p$  concatenada ao vetor  $f_d$  (teorema 1 - anexo 1) [20]. Ou seja

$$\rho(P_p) = \rho([P_p | f_d]) \quad (2-11)$$

Se a igualdade da equação (2-11) é satisfeita, significa que o vetor  $f_d$  pode ser escrito como uma combinação linear das colunas da matriz  $P_p$  e portanto o sistema tem solução.

A equação (2-11) serve para avaliar se um determinado caso particular da equação (2-8) tem ou não solução. Entretanto, para o controlador adaptativo, é mais importante determinar as condições para as quais o sistema da equação (2-8) tenha sempre solução. Para determinar estas condições vai-se analisar o posto da matriz  $P_p$ . Considere as seguintes situações:

1. Se todos os coeficientes  $a_i$  e  $b_i$  da matriz  $P_p$  são diferentes de zero, então todas as colunas (e linhas) da matriz  $P_p$  são linearmente independentes, e neste caso o sistema da equação (2-8) sempre tem solução para qualquer vetor  $f_d$  em  $(\mathbb{R}^m, \mathbb{R})$ , dado que a matriz  $P_p$  tem posto  $m$ .

2. Se um ou mais coeficientes  $a_i$  ou  $b_i$  forem iguais a zero, então é necessário utilizar a equação (2-11) para saber se o sistema tem solução ou não. Existe uma alternativa que dispensa o uso da equação (2-11), que é colocar todos os pólos da equação característica desejada na origem, e fazer um sistema com resposta de tempo finito (deadbeat). Entretanto, este tipo de sistema apresenta elevadas oscilações entre os instantes de amostragem [1,21]. Assim, vai-se desenvolver este trabalho considerando que todos os parâmetros do processo são diferentes de zero.

Para o caso do controlador adaptativo, o cálculo dos parâmetros do controlador estabilizante, assim como a identificação dos parâmetros do processo, requerem a solução de um sistema linear de equações algébricas a cada iteração. Desta forma, o mesmo algoritmo vai ser utilizado nos dois casos. O desenvolvimento matemático do algoritmo para solucionar o sistema é mostrado no capítulo 3 e se baseia no método das direções conjugadas apresentado por Luemberg [22], para a minimização da forma quadrática  $0.5 \mathbf{x}^T \mathbf{Q} \mathbf{x} - \mathbf{b} \mathbf{x}$ , que é equivalente a solucionar o sistema  $\mathbf{Q} \mathbf{x} = \mathbf{b}$ .

### 2.3 - ESTUDO DE CASOS.

Abaixo são apresentados diversos exemplos para mostrar a validade do esquema proposto.

### 2.3.1 - PROCESSO ESTAVEL DE PRIMEIRA ORDEM

#### REFERENCIA TIPO DEGRAU E RAMPA

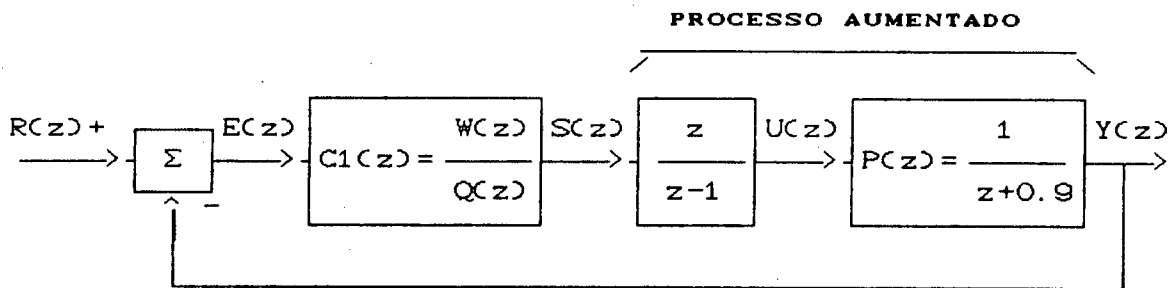


Fig. 2.3 - Sistema do exemplo 2.3.1.

A  $F(z)$  desejada, o sistema da equação (2-8) aplicada ao processo da figura 2.3 e a respectiva solução, são dadas abaixo.<sup>3</sup>

$$F(z) = z(z-0.7)^3 = z^4 - 2.1 z^3 + 1.47 z^2 - 0.343 z \quad (2-12)$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -0.1 & 1 & 1 & 0 \\ -0.9 & -0.1 & 0 & 1 \\ 0 & -0.9 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ w_1 \\ w_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 2.37 \\ -0.343 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \begin{array}{l} q_1 = -2 \\ q_2 = 0 \\ w_1 = 2.17 \\ w_2 = -2.143 \end{array}$$

Assim  $C_1(z)$  fica

$$C_1(z) = \frac{2.17 z - 2.143}{z^2 - 2 z} \quad (2-13)$$

<sup>3</sup> Os gráficos são mostrados nas páginas 21, 22 e 23. No anexo 3 são dadas tabelas para consultas mais detalhadas.

### 2.3.2 - PROCESSO ESTAVEL DE PRIMEIRA ORDEM

#### REFERENCIA TIPO DEGRAU E RAMPA

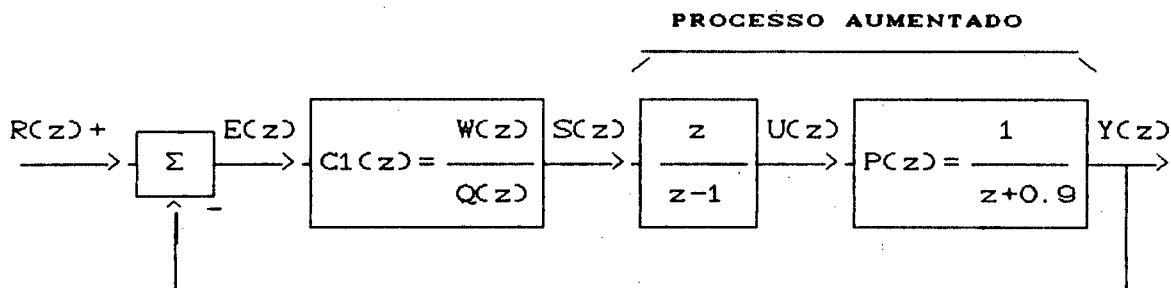


Fig. 2.4 - Sistema do exemplo 2.3.2.

A  $F(z)$  desejada, o sistema da equação (2-8) aplicada ao processo da figura 2.4 e a respectiva solução, são dadas abaixo.<sup>4</sup> A diferença entre este caso e o anterior, é a equação característica desejada, que neste caso tem raízes no semi-plano esquerdo do plano complexo.

$$F(z) = z(z+0.7)^3 = z^4 + 2.1 z^3 + 1.47 z^2 + 0.343 z \quad (2-14)$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -0.1 & 1 & 1 & 0 \\ -0.9 & -0.1 & 0 & 1 \\ 0 & -0.9 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ w_1 \\ w_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2.2 \\ 2.37 \\ 0.343 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \begin{array}{l} q_1 = 2.2 \\ q_2 = 0 \\ w_1 = 2.59 \\ w_2 = 2.323 \end{array}$$

Assim  $c_1(z)$  fica

$$c_1(z) = \frac{2.59 z + 2.323}{z^2 + 2.2 z} \quad (2-15)$$

<sup>4</sup>Os gráficos são mostrados nas páginas 24, 25 e 26. No anexo 3 são dadas tabelas para consultas mais detalhadas.

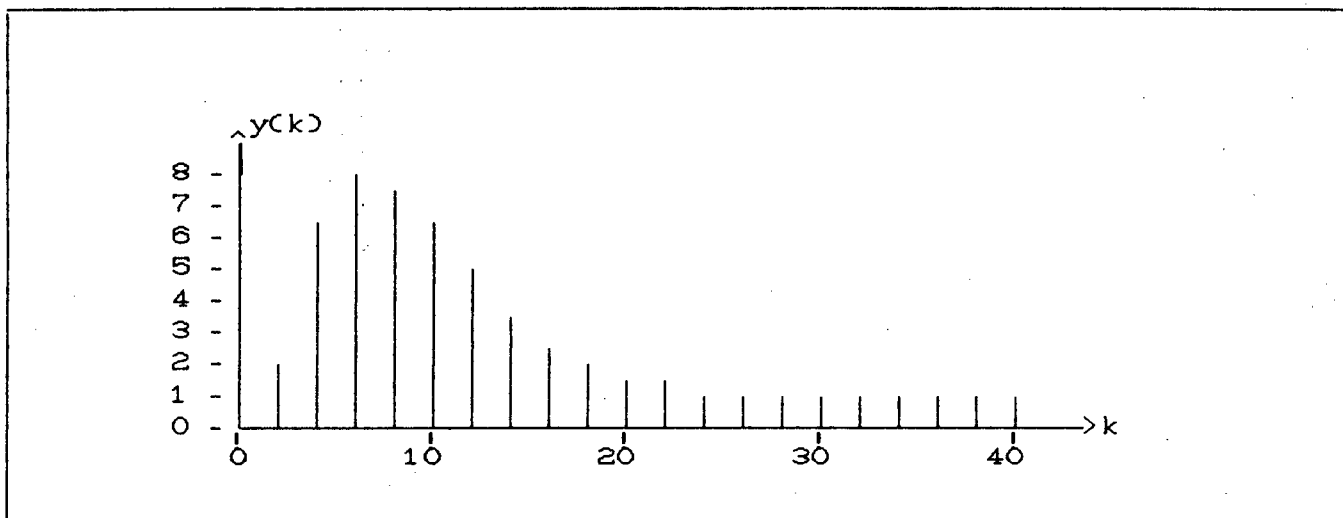


Fig. 2.5 - Resposta a uma referência tipo degrau unitário para o sistema da figura 2.3.

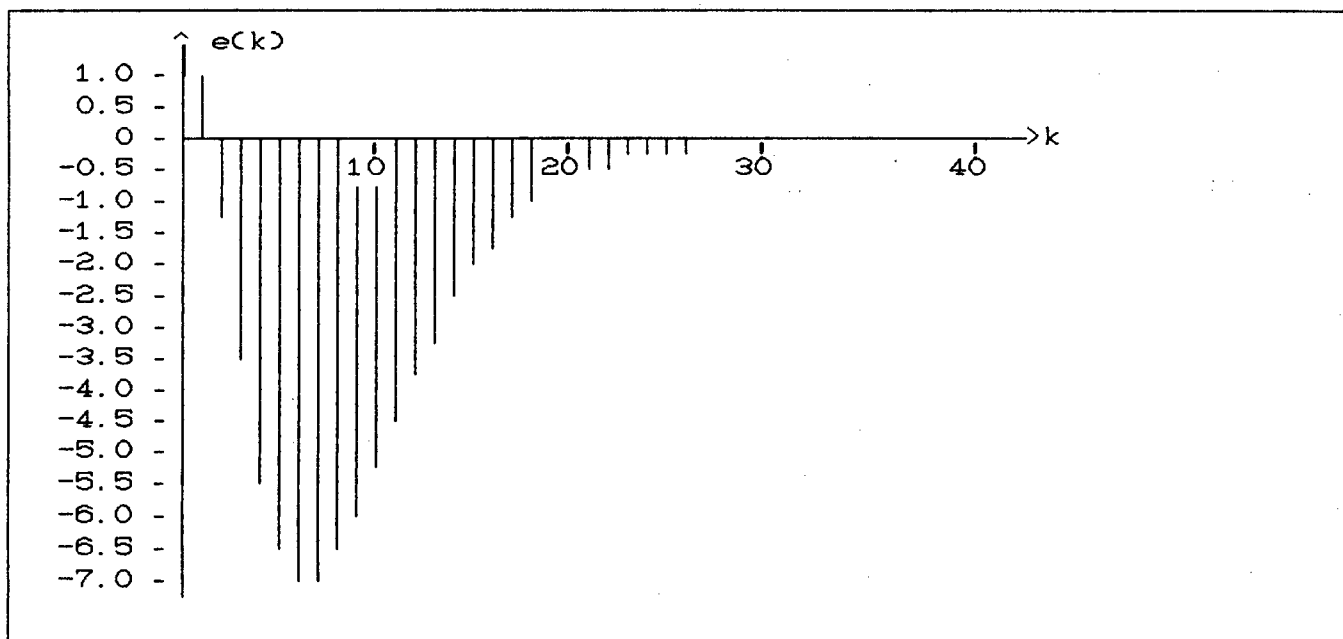


Fig. 2.6 - Gráfico do erro na resposta ao degrau unitário para o sistema da figura 2.3. Após a iteração 27 o erro vai para zero.

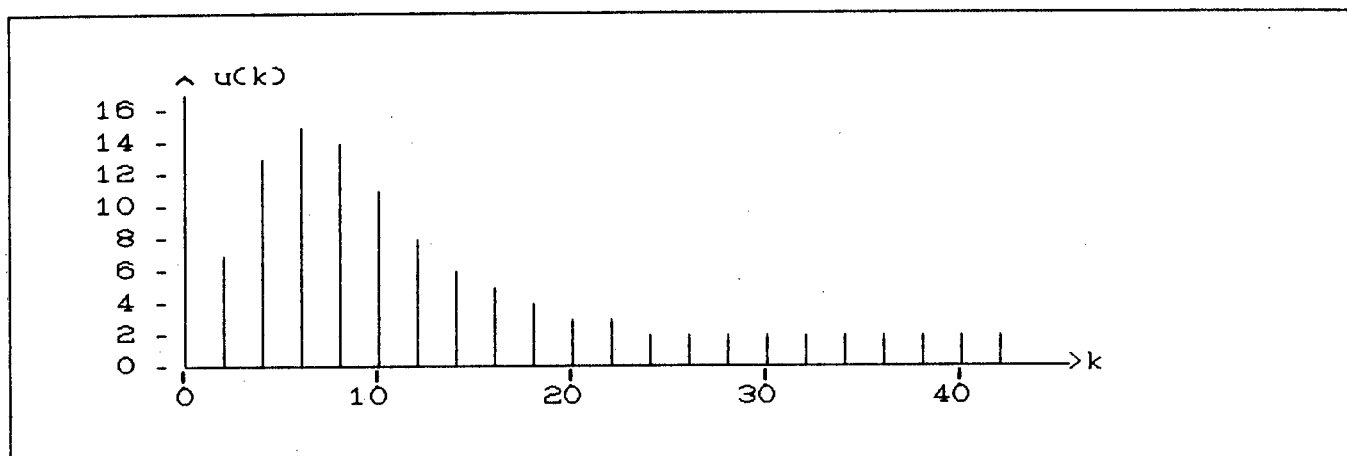


Fig. 2.7 - Gráfico do sinal  $u(k)$  aplicado ao processo da figura 2.3, devido a uma referência tipo degrau unitário.

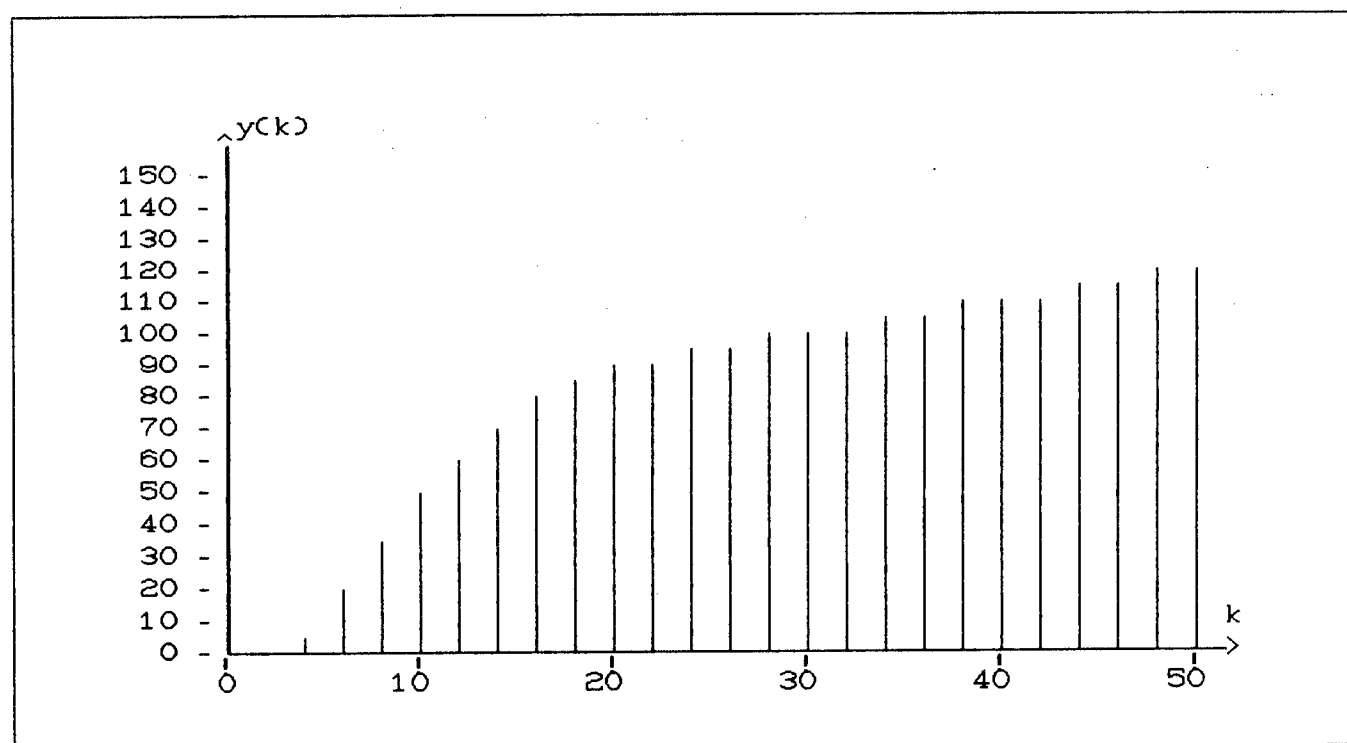


Fig 2.8 - Resposta a uma referência tipo rampa unitária para o sistema representado pela figura 2.3.

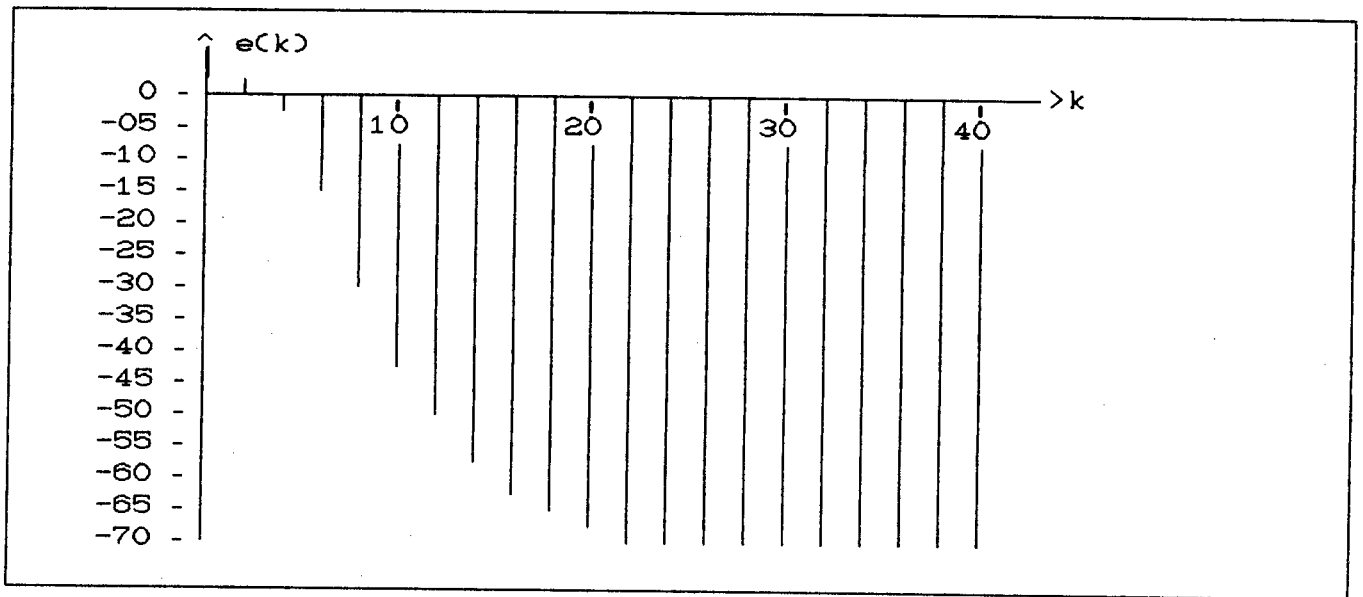


Fig. 2.9 - Gráfico do erro na resposta à rampa unitária para o sistema da figura 2.3.

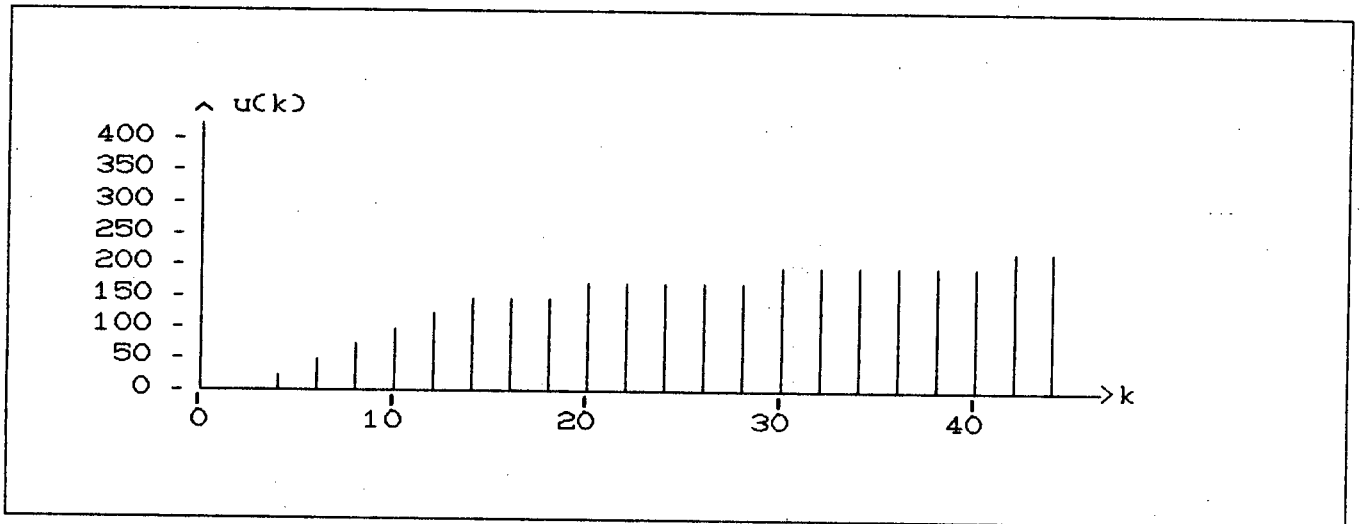


Fig. 2.10 - Gráfico do sinal  $u(k)$  aplicado ao processo da figura 2.3, devido a uma referência tipo rampa unitária.

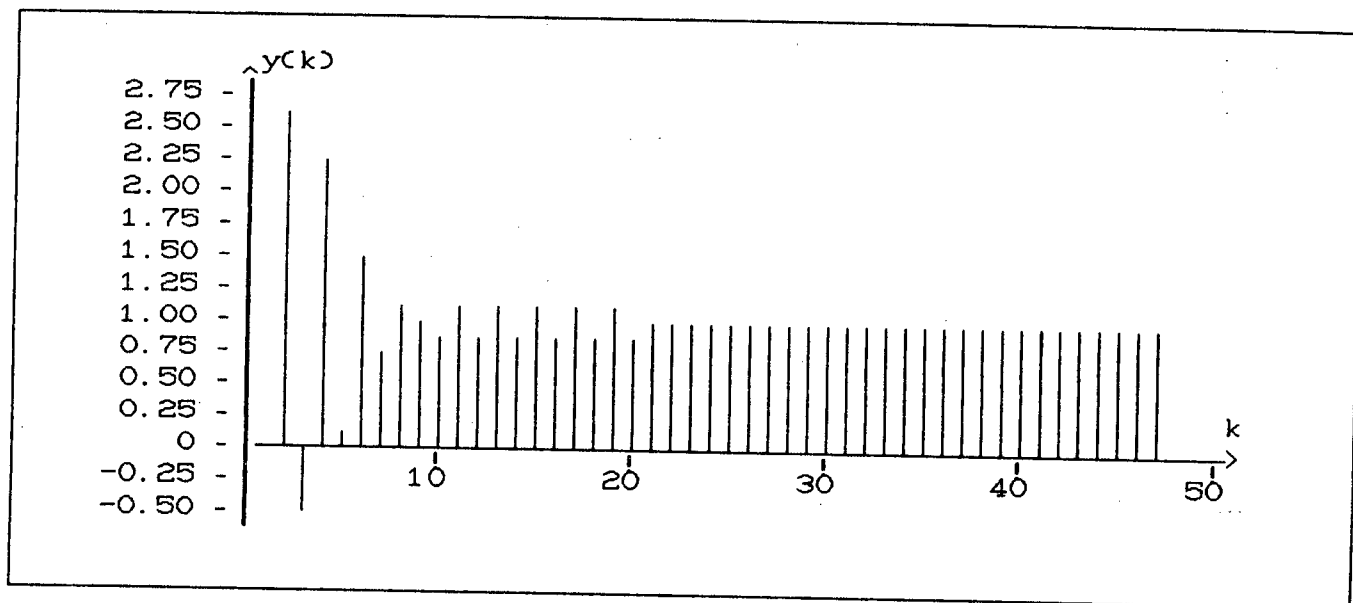


Fig. 2.11 - Resposta a uma referência tipo degrau unitário para o sistema da figura 2.4.

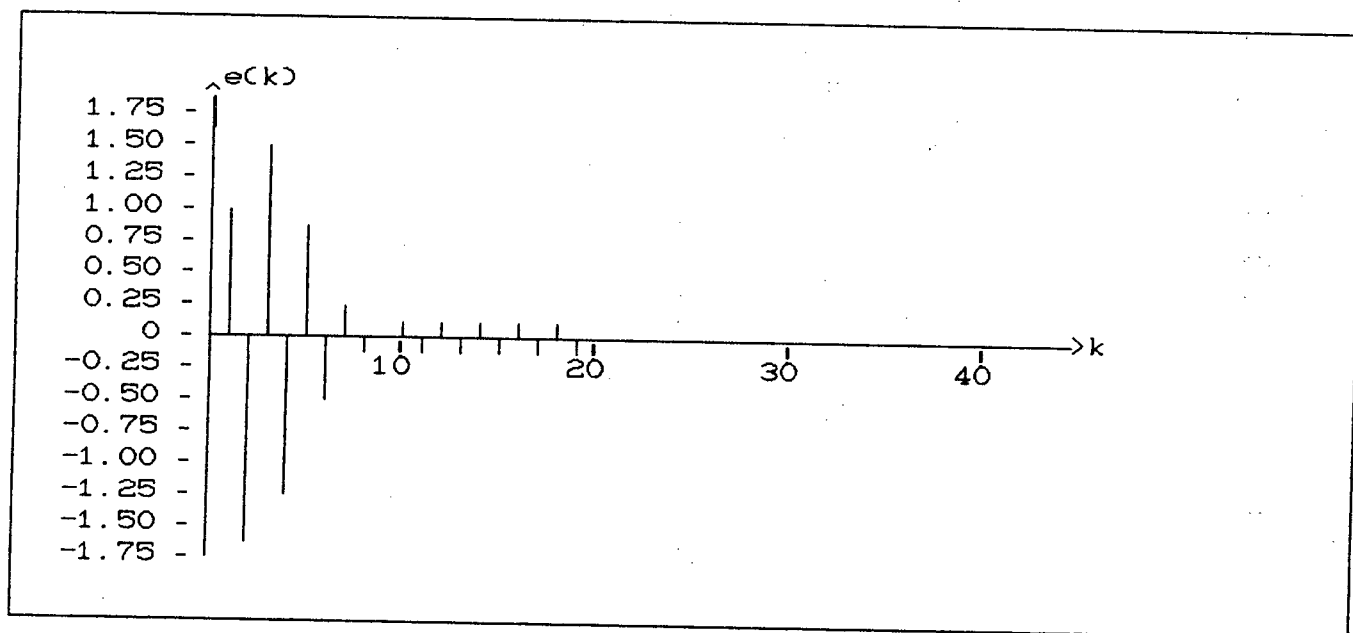


Fig. 2.12 - Gráfico do erro na resposta ao degrau unitário para o sistema da figura 2.4. Após vigésima iteração o erro vai para zero.



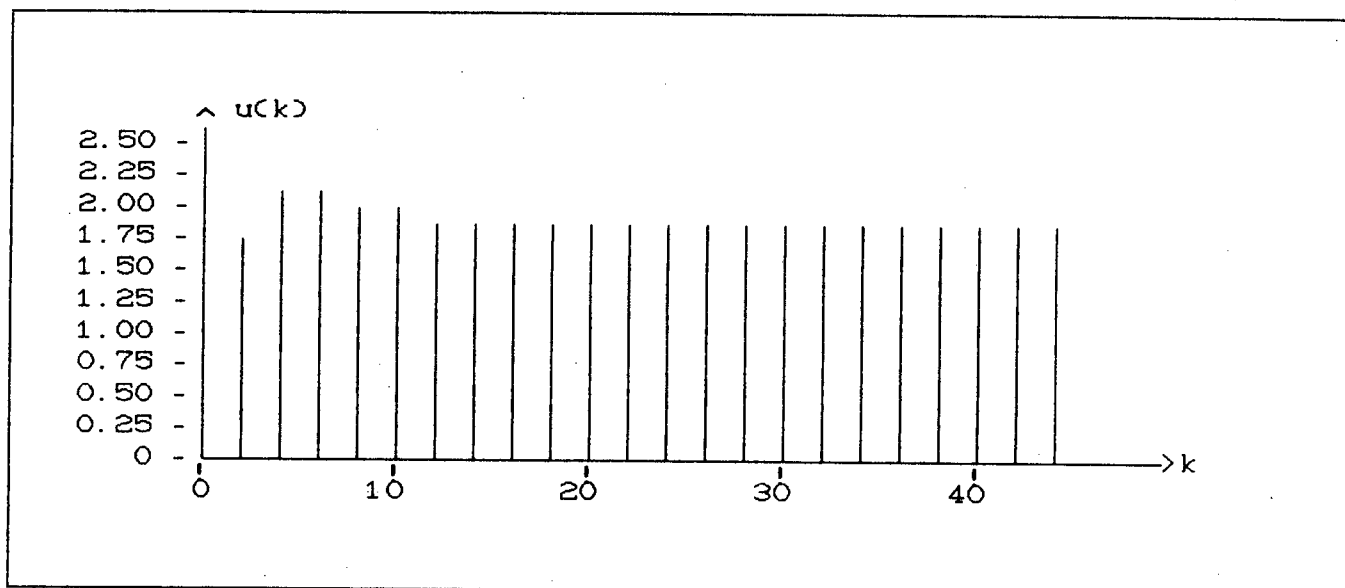


Fig. 2.13 - Gráfico do sinal  $u(k)$  aplicado ao processo da figura 2.4, devido a uma referência tipo degrau unitário.

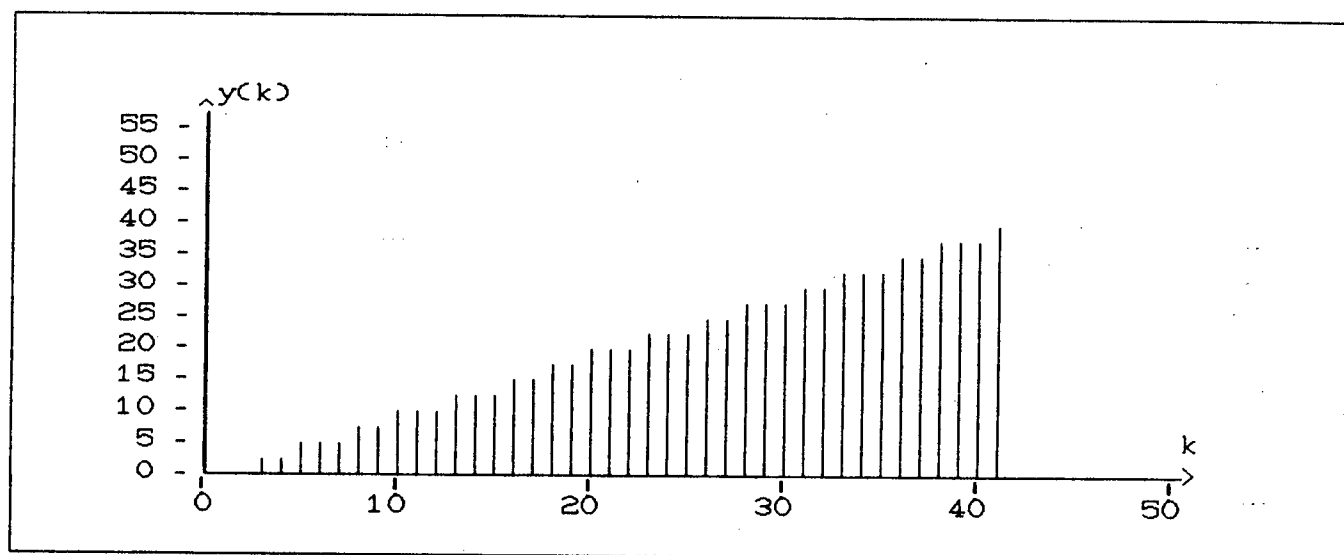


Fig. 2.14 - Resposta a uma referência tipo rampa unitária para o sistema da figura 2.4.

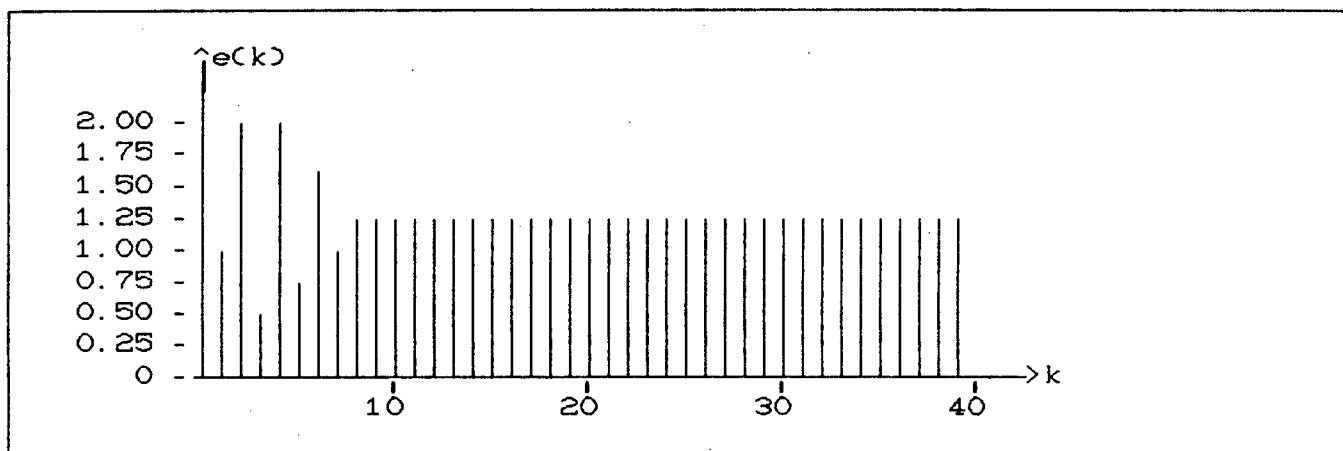


Fig. 2.15 - Gráfico do erro na resposta à rampa unitária para o sistema da figura 2.4.

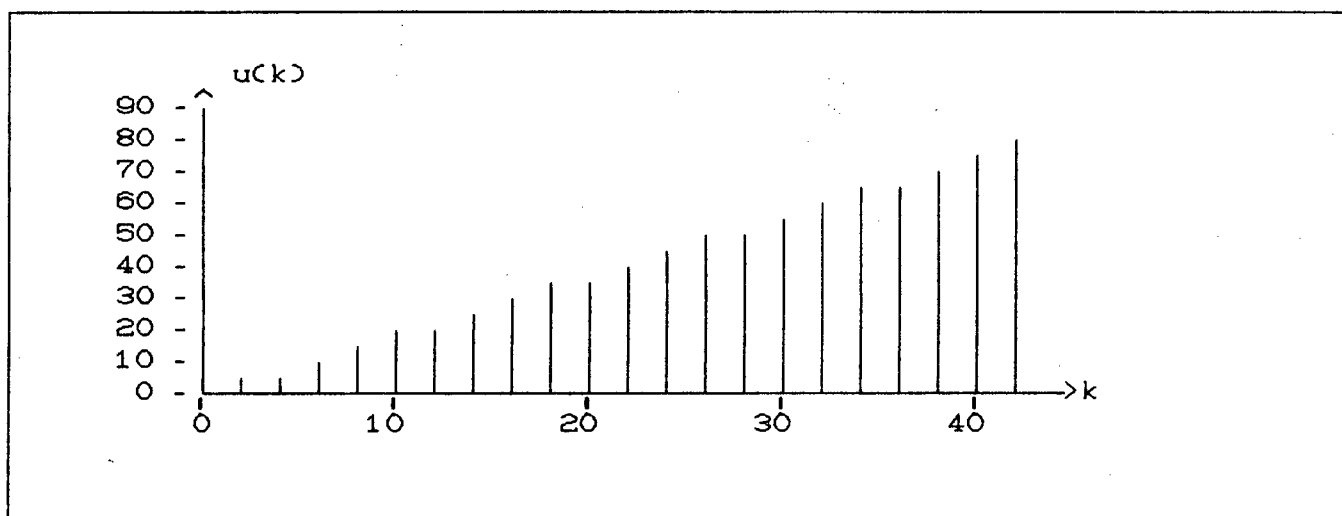


Fig. 2.16 - Gráfico do sinal  $u(k)$  aplicado no processo da figura 2.4, devido a uma referência tipo rampa unitária.

### 2.3.3 PROCESSO ESTAVEL DE SEGUNDA ORDEM

#### REFERENCIA TIPO DEGRAU

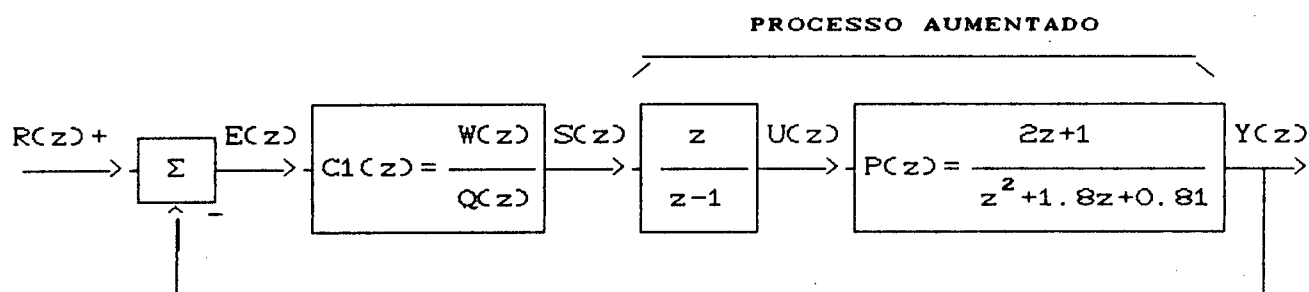


Fig. 2.17 - Sistema do exemplo 2.3.3.

A  $F(z)$  desejada, o sistema da equação (2-8) aplicada ao processo da figura 2.17 e a respectiva solução, são dadas abaixo.<sup>5</sup>

$$F(z) = z(z+0.7)^5 = z^6 + 3.5 z^5 + 4.9 z^4 + 3.43 z^3 + 1.2005 z^2 + 0.16807 z \quad (2-16)$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.8 & 1 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ -0.99 & 0.8 & 1 & 1 & 2 & 0 \\ -0.81 & -0.99 & 0.8 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & -0.81 & -0.99 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -0.81 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \\ w_1^1 \\ w_2^1 \\ w_3^1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2.7 \\ 5.89 \\ 4.24 \\ 1.2005 \\ 0.16807 \\ 0 \end{bmatrix}$$

<sup>5</sup>Os gráficos são mostrados nas páginas 31 e 32. No anexo 3 são dadas tabelas para consultas mais detalhadas.

$$\begin{array}{ll}
 q_1 = 2.7 & w_1 = 1.3156667 \\
 q_2 = 1.09866667 & w_2 = 2.3592 \\
 q_3 = 0 & w_3 = 1.05799
 \end{array}$$

Assim,  $C_1(z)$  fica

$$C_1(z) = \frac{1.3156667 z^2 + 2.3592 z + 1.05799}{z^3 + 2.7 z^2 + 1.0986667 z} \quad (2-17)$$

#### 2.3.4 PROCESSO INSTAVEL DE PRIMEIRA ORDEM

##### REFERENCIA TIPO DEGRAU

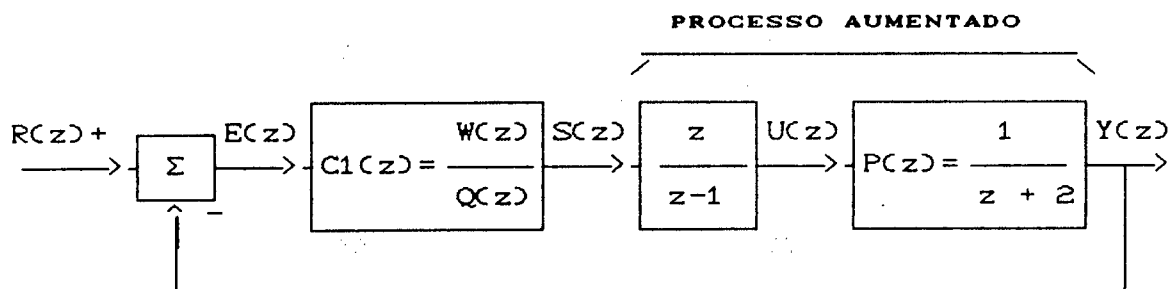


Fig. 2.18 - Sistema do exemplo 2.3.4.

A  $F(z)$  desejada, o sistema da equação (2-8) aplicada ao processo da figura 2.18 e a respectiva solução, são dadas abaixo.<sup>6</sup>

<sup>6</sup>Os gráficos são mostrados na página 32 e 33. No anexo 3 são dadas tabelas para consultas mais detalhadas.

$$F(z) = z(z+0.7)^3 = z^4 + 2.1 z^3 + 1.47 z^2 + 0.343 z \quad (2-18)$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ w_1 \\ w_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.1 \\ 3.47 \\ 0.343 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \begin{array}{l} q_1 = 1.1 \\ q_2 = 0 \\ w_1 = 2.37 \\ w_2 = 2.543 \end{array}$$

Assim,  $C_1(z)$  fica

$$C_1(z) = \frac{2.37 z + 2.543}{z^2 + 1.1 z} \quad (2-19)$$

### 2.3.5 PROCESSO INSTAVEL, DE SEGUNDA ORDEM E FASE NAO-MINIMA

#### REFERENCIA TIPO DEGRAU

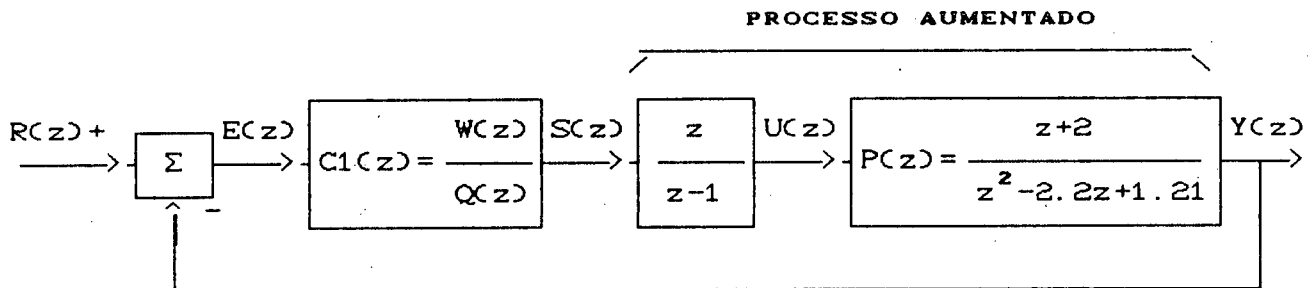


Fig. 2.19 - Sistema do exemplo 2.3.5.

A  $F(z)$  desejada, o sistema da equação (2-8) aplicada ao processo da figura 2.19 e a respectiva solução, são dadas abaixo<sup>7</sup>

<sup>7</sup>Os gráficos são mostrados na página 34 e 35. No anexo 3 são dadas tabelas para consultas mais detalhadas.

$$F(z) = z(z-0.7)^5 = z^6 - 3.5 z^5 + 4.9 z^4 - 3.43 z^3 + 1.2005 z^2 - 0.16807z \quad (2-20)$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -3.2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3.41 & -3.2 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ -1.21 & 3.41 & -3.2 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & -1.21 & 3.41 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -1.21 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \\ w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.3 \\ 1.49 \\ -2.22 \\ 1.2005 \\ 0.16807 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$q_1 = -0.3$$

$$q_2 = 0.37707492$$

$$q_3 = 0$$

$$w_1 = 0.15292508$$

$$w_2 = -0.29621041$$

$$w_3 = 0.14409533$$

Assim,  $c_1(z)$  fica

$$c_1(z) = \frac{0.15292508 z^2 - 0.29621041 z + 0.14409533}{z^3 - 0.3 z^2 + 0.37707492 z} \quad (2-21)$$

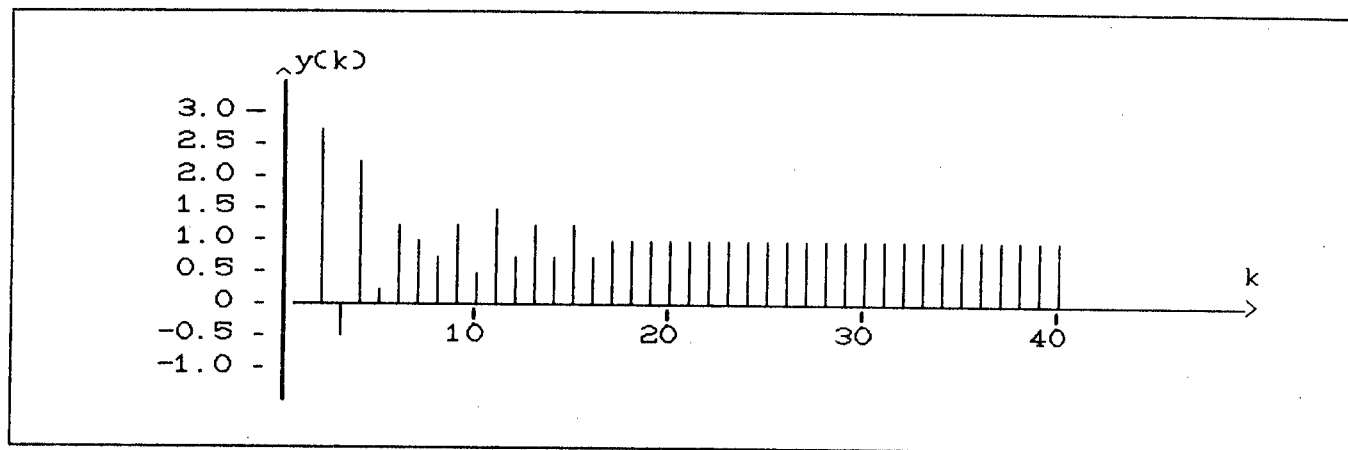


Fig. 2.20 - Resposta a uma referência tipo degrau unitário para o sistema da figura 2.17.

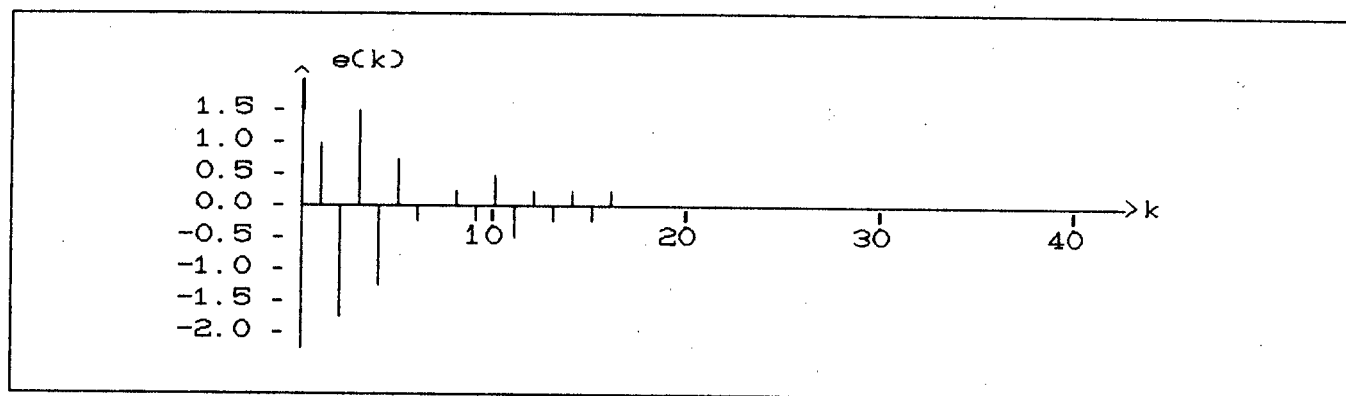


Fig. 2.21 - Gráfico do erro na resposta ao degrau unitário para o sistema da fig. 2.17.. Após a iteração 16 o erro é zero.

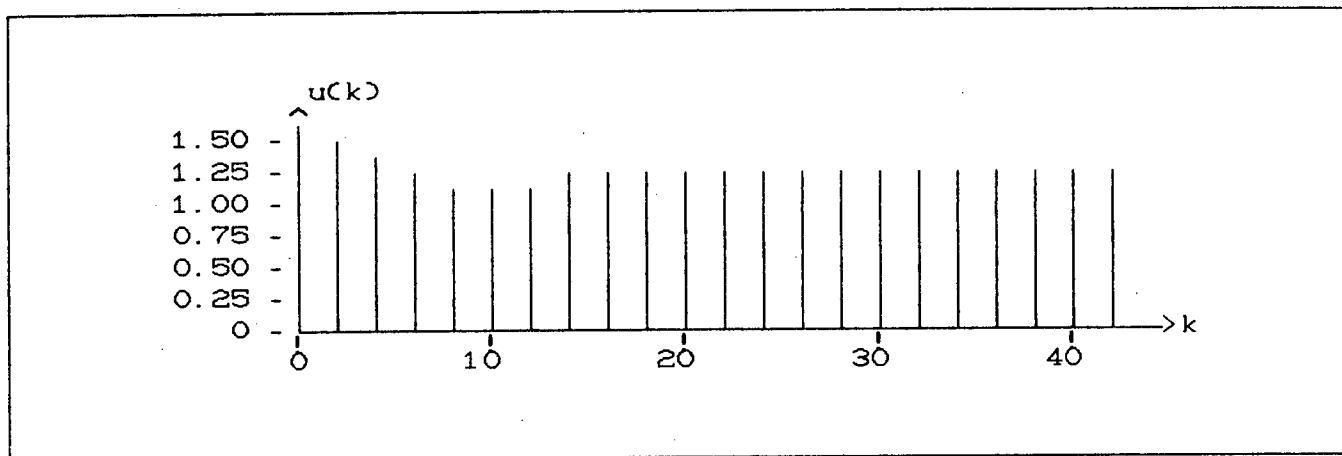


Fig. 2.22 - Gráfico do sinal  $u(k)$  aplicado ao processo da figura 2.17, devido a uma referência tipo degrau unitário.

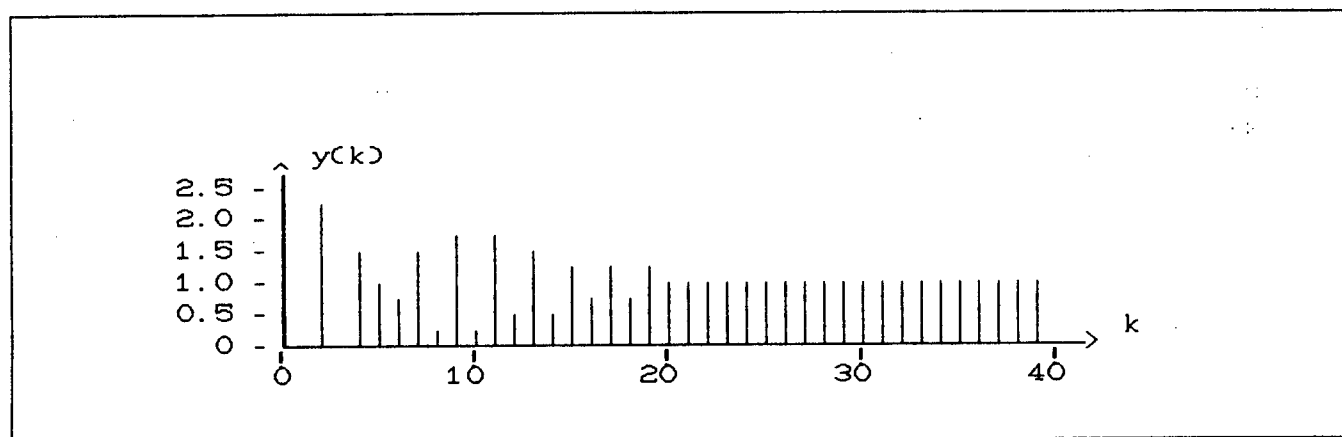


Fig. 2.23 - Resposta a uma referência tipo degrau unitário para o sistema da fig. 2.18.



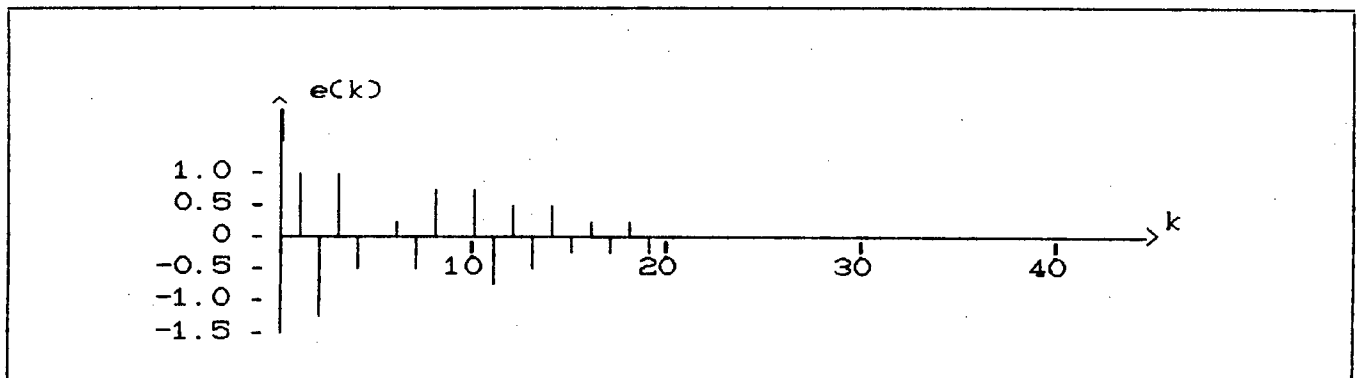


Fig. 2.24 - Gráfico do erro na resposta ao degrau unitário para o sistema da fig. 2.18. Após a iteração 20 o erro é zero.

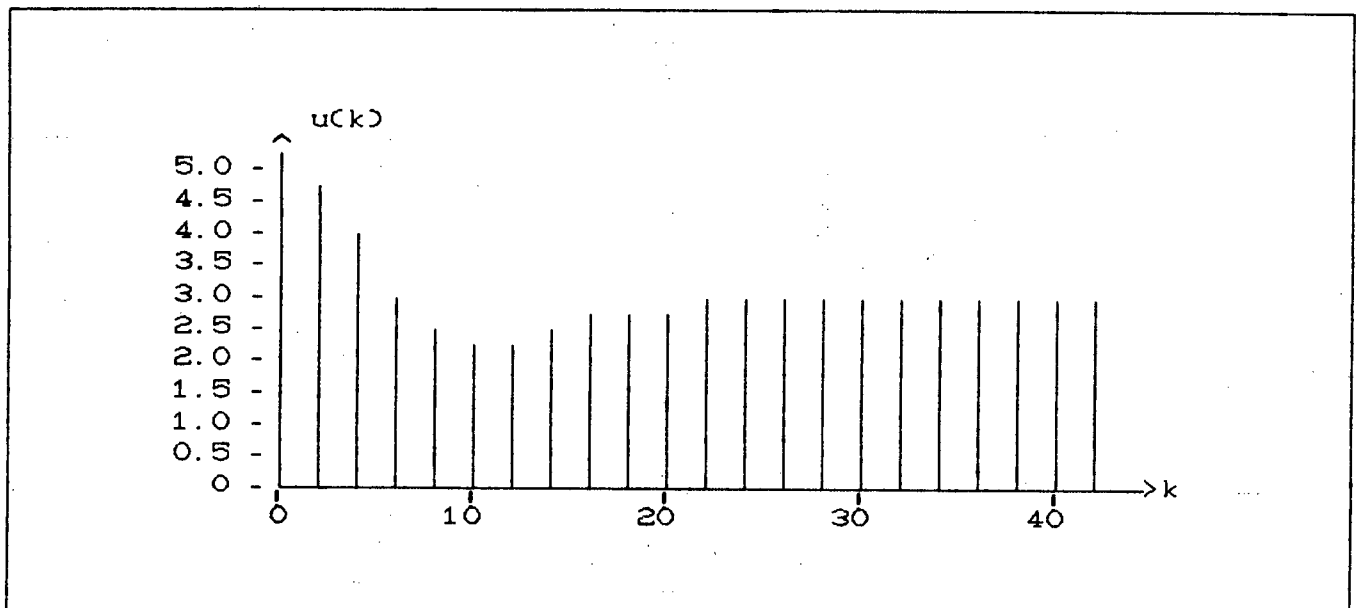


Fig. 2.25 - Gráfico do sinal  $u(k)$  aplicado ao processo da figura 2.18, devido a uma referência tipo degrau unitário.

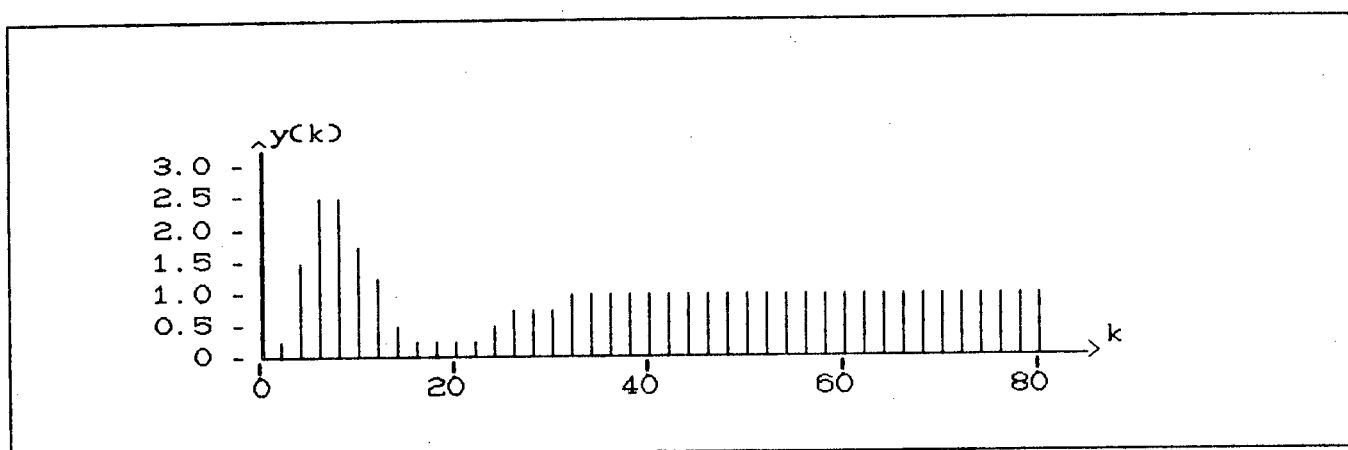


Fig. 2.26 - Resposta a uma referência tipo degrau para o sistema representado pela fig. 2.19.

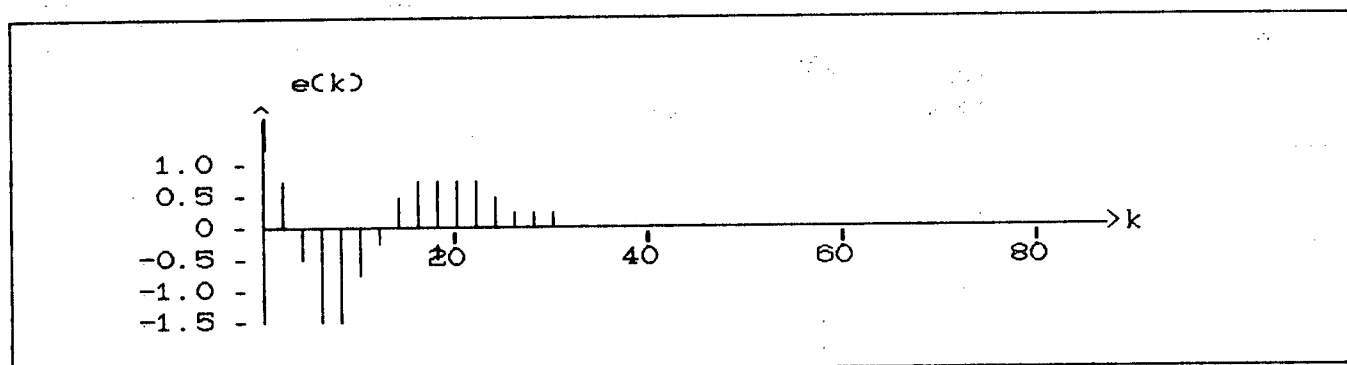


Fig. 2.27 - Gráfico do erro na resposta ao degrau unitário para o sistema da fig. 2.19. Após a iteração 32 o erro é zero.

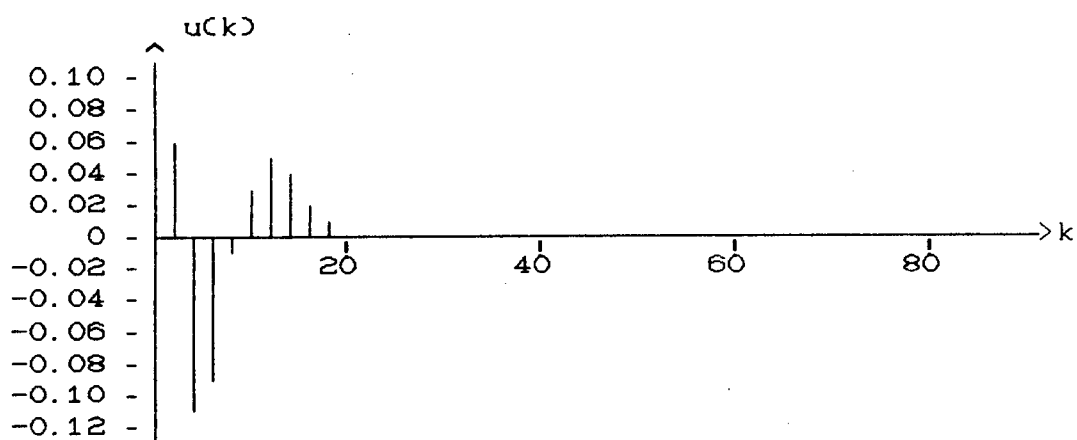


Fig. 2.28 - Gráfico do sinal  $u(k)$  aplicado ao processo da figura 2.19, devido a uma referência tipo degrau unitário. Após a iteração 19 o sinal de controle fica com um valor muito pequeno para ser representado neste gráfico.

## 2.4 - CONCLUSOES

Observando os gráficos dos diversos casos, pode se notar que o sistema da figura 2.3 tem um sobre-sinal para o degrau e um erro em regime permanente para rampa, maiores que nos outros casos. Isto se deve ao fato de que não se tem controle sobre os valores calculados para os parâmetros do controlador estabilizante. Estes parâmetros podem ter valores grandes ou pequenos, positivos ou negativos; Quando estes parâmetros tem valores grandes em módulo e sinais diferentes podem acontecer problemas de oscilações muito elevadas. Isto é uma característica deste tipo de controlador.

Comparando as características mais importantes do sistema não-adaptativo, dadas no início do capítulo, com os gráficos dos diversos casos, pode-se comprovar que todas elas foram atendidas.

Para solucionar o sistema da equação (2-8) vai-se utilizar os subprogramas CALCULA e SOLUÇÃO. O subprograma SOLUÇÃO é também utilizado para identificar o processo como será visto no próximo capítulo. Estes subprogramas encontram-se no anexo 2.

## CAPITULO 3 - O IDENTIFICADOR

### 3.1 - INTRODUCAO

Há muito tempo o ser humano tenta conhecer e dominar o ambiente que o cerca. Para atingir tal intento, ele vem tentando produzir modelos dos mais diversos tipos de sistemas e processos, como por exemplo processos biológicos, químicos, elétricos, econômicos, entre outros [23,24,28]. Para controlar um processo, é necessário que se tenha um bom modelo do mesmo. Assim, o problema de criar um modelo para um processo, pode ser considerado dual ao do controle do processo. Não se pode controlar um processo a menos que ele tenha sido modelado (identificado) antes ou durante a aplicação do controle [24]. Sem um modelo suficiente do processo a ser controlado, a síntese de um algoritmo de controle não é possível [23]. Em geral, os modelos matemáticos obtidos podem ser aplicados para os seguintes propósitos [23]:

- Obter um melhor conhecimento do processo.
- Verificação de modelos teóricos.
- Síntese de sistemas de controle.
- Otimização do comportamento de um processo.
- Computação de variáveis que não são mensuráveis diretamente.

Existem basicamente dois métodos para a obtenção do modelo matemático de um processo. Pode-se desenvolver as relações individuais entre os diversos componentes do sistema, e então

juntar tudo formando um conjunto de equações que representam o sistema, ou obtém-se um modelo a partir das relações dos sinais de entrada e saída do processo. O primeiro caso é convencionado ser chamado de modelamento e o segundo de identificação. Se a análise experimental (identificação) de um processo é executada, os sinais de entrada e saída são medidos. Esta identificação permite a criação de modelos para processos de estrutura arbitrárias. Métodos de análise idênticos podem ser aplicados para diversos e complicados processos [23]. Entretanto, em geral, as técnicas de identificação não se aplicam a processos de qualquer tipo. Como na teoria de controle, existem várias técnicas teóricas, cada uma das quais aplicável a um certo número de situações e casos [24].

Como foi anteriormente mencionado existem basicamente duas formas de se obter o modelo de um determinado sistema: modelamento e identificação. O modelamento fornece mais informações que a identificação e por isso é mais utilizado nas ciências de base como física, química, etc [23,28]. Entretanto, muitas vezes o modelo não pode ser obtido a partir de argumentos físicos, devido ao desconhecimento de como funcionam alguns componentes, ou devido a grande complexidade do sistema [25,28]. Assim, quando o interesse é apenas controlar o sistema, as técnicas de identificação são mais utilizadas. Em alguns tipos de algoritmos adaptativos, a identificação "on-line" do processo é necessária, dado que a medida em que o modelo do processo varia, deve variar também o algoritmo de controle do controlador, de forma a manter o índice de desempenho desejado.

Neste trabalho estamos interessados na identificação "on-line", que usada para a adaptação dos parâmetros do controlador caracterizam um sistema adaptativo.

Os sistemas "on-line" clássicos são baseados em teoria da estabilidade. É comum o uso do método de Lyapunov [19] ou outra teoria qualquer como hiperestabilidade usada por Landau [22] para garantir a convergência assintótica dos parâmetros. Em presença de perturbação estocástica, é comum o uso de métodos baseados no filtro de Kalman, como o método dos mínimos quadrados recursivos [23].

É interessante observar que estes métodos garantem a convergência dos parâmetros em um número infinito de iterações. Métodos rápidos como os de Landau [26], atualizam rapidamente os parâmetros no início de sua operação. Após a adaptação, a sensibilidade do algoritmo é perdida e se houver nova mudança dos parâmetros a identificação é muito lenta. Está-se propondo neste trabalho um algoritmo que, no caso limite, identifique os parâmetros do processo em um número de iterações igual ao número de parâmetros do processo.

Neste capítulo vai-se apresentar o identificador que, junto com o controlador visto no capítulo 2 e mais um mecanismo de ajuste, vai formar a estrutura do sistema adaptativo, o qual é apresentado no capítulo 4. Vai-se propor aqui, um identificador que apresenta as seguintes características:

1. Rápido: O identificador fornece os parâmetros do processo em poucas iterações do sistema. O número de iterações depende da ordem do processo.

2. Não há inversão matricial.

3. É recursivo.

4. Possui uma boa estabilidade numérica quando as entradas e saídas formam vetores linearmente dependentes.

5. É aplicável a processos não-perturbados, lineares, discretos e com variação discreta no tempo dos parâmetros. A ordem do processo deve ser conhecida.

O algoritmo apresentado para identificação do processo necessita solucionar um sistema de equações lineares algébricas. A solução do sistema é baseada no método das direções conjugadas, apresentado por Luemberg [22], para a minimização da forma quadrática  $0.5 \mathbf{x}^T \mathbf{Q} \mathbf{x} - \mathbf{b}^T \mathbf{x}$ , e minimizar esta forma quadrática é equivalente a solucionar  $\mathbf{Q} \mathbf{x} = \mathbf{b}$ .



### 3.1 - DESENVOLVIMENTO MATEMATICO

Seja o processo linear discreto de ordem  $n$ , conhecida, com parâmetros  $a_i$  e  $b_i$  supostamente desconhecidos, definido por

$$y(k) = -a_1 y(k-1) + \dots - a_n y(k-n) + b_1 u(k-1) + \dots + b_n u(k-n) \quad (3-1)$$

com função de transferência conforme (3-2)

$$\frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{b_1 z^{-1} + \dots + b_n z^{-n}}{1 + a_1 z^{-1} + \dots + a_n z^{-n}} \quad (3-2)$$

Tomando-se  $m$  amostras da saída, onde  $m \geq 2n$  e considerando a equação (3-1) tem-se

$$y(k-m+1) = -a_1 y(k-m) + \dots - a_n y(k-m-n+1) + b_1 u(k-m) + \dots + b_n u(k-m-n+1)$$

$$y(k-1) = -a_1 y(k-2) + \dots - a_n y(k-n-1) + b_1 u(k-2) + \dots + b_n u(k-n-1)$$

$$y(k) = -a_1 y(k-1) + \dots - a_n y(k-n) + b_1 u(k-1) + \dots + b_n u(k-n)$$

Sejam

$$y_k \triangleq [y(k-m+1), \dots, y(k-1), y(k)]^T$$

$$A_k \triangleq \begin{bmatrix} y(k-m) & \dots & y(k-m-n+1) & u(k-m) & \dots & u(k-m-n+1) \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ y(k-1) & \dots & y(k-n) & u(k-1) & \dots & u(k-n) \end{bmatrix}$$

$$x^* \triangleq [-a_1, \dots, -a_n, b_1, \dots, b_n]^T$$

As dimensões da matriz e vetores acima são:

$y_k$  é de dimensão  $[m \times 1]$

$A_k$  é de dimensão  $[m \times 2n]$

$x^*$  é de dimensão  $[2n \times 1]$ .

A partir das definições de  $y_k$ ,  $A_k$  e  $x^*$  pode-se escrever a seguinte equação matricial:

$$A_k x^* = y_k \quad (3-3)$$

Como a solução da equação (3-3) depende do instante  $k$  considerado, vai-se transformar a equação (3-3) na equação abaixo:

$$A_k \hat{x}_{k+1} = y_k \quad (3-4)$$

onde  $\hat{x}_{k+1}$ , dado abaixo, representa o vetor dos parâmetros identificados.

$$\hat{x}_{k+1} \triangleq [-\hat{a}_1(k+1), \dots, -\hat{a}_n(k+1), \hat{b}_1(k+1), \dots, \hat{b}_n(k+1)]^T.$$

Para solucionar o sistema da equação (3-4), vai-se inicialmente considerar o caso em que  $m = 2n$  e o posto da matriz  $A_k$  é  $2n$ . Neste caso, os parâmetros identificados podem ser diretamente determinados pela equação,

$$\hat{x}_{k+1} = A_k^{-1} y_k \quad (3-5)$$

e  $\hat{x}_{k+1}$  será igual a  $x^*$ .

Supondo agora que  $m \geq 2n$  e que o posto de  $A_k$  ainda é  $2n$ , pode-se fazer o desenvolvimento que se segue.

Pré-multiplicando ambos os lados de (3-4) por  $A_k^T$  tem-se

$$A_k^T A_k \hat{x}_{k+1} = A_k^T y_k. \quad (3-6)$$

Como o posto de  $A_k$  é  $2n$ , o posto de  $A_k^T A_k$  também é  $2n$  [19] e assim os parâmetros podem ser diretamente determinados por

$$\hat{x}_{k+1} = (A_k^T A_k)^{-1} A_k^T y_k \quad (3-7)$$

onde  $\hat{x}_{k+1}$  será igual a  $x^*$ .

Deve-se ainda considerar o caso em que o posto da matriz  $A_k$  é menor que  $2n$  e que o posto da matriz  $A_k$  é igual ao posto da matriz  $A_k$  concatenada ao vetor  $y_k$ . Ou seja

$$[\rho(A_k) < 2n] \text{ e } [\rho(A_k) = \rho(A_k | y_k)] \quad (3-8)$$

Quando ocorre a situação expressa pela equação (3-8), o sistema tem infinitas soluções, e  $[2n - \rho(A_k)]$  variáveis podem ser arbitradas (teorema 1 - anexo 1). Nesta situação, a solução  $\hat{x}_{k+1}$  não pode ser determinada pelas equações (3-5) ou (3-7), uma vez que o posto da matriz  $A_k$  é menor que  $2n$  por hipótese.

Antes de apresentar a solução geral da equação (3-4), vão-se fazer alguns comentários em relação ao funcionamento do identificador, para um sistema estável com entrada em degrau e com  $2n$  amostragens.

O identificador funciona da seguinte forma: No intervalo de tempo após o instante inicial ou após uma perturbação estrutural, os sinais  $u(k)$  e  $y(k)$  variam em relação ao estado de regime anterior. Neste intervalo de tempo a matriz  $A_k$  apresenta posto  $2n$ , conforme os resultados experimentais que serão apresentados, e a identificação dos novos parâmetros do processo é obtida. Quando o sistema entra em regime, o identificador deve continuar fornecendo os mesmos parâmetros identificados, apesar das colunas da matriz  $A_k$  serem linearmente dependentes o que implica em infinitas soluções, uma vez que a condição (3-8) é verificada. Quando isto acontece deve-se prever um mecanismo para que a solução seja única e igual a anteriormente apresentada, pois os parâmetros do processo não variaram.

A partir da equação (3-4) e das definições da matriz  $A_k$  e dos vetores  $y_k$  e  $\hat{x}_{k+1}$ , pode-se observar que uma condição suficiente para que o sistema da equação (3-4) tenha uma única solução (os coeficientes do processo), é que se tenha no mínimo  $(2n)$  valores diferentes, assintoticamente crescentes e/ou decrescentes, de  $u(k)$  e de  $y(k)$ . Obter estes valores para  $u(k)$  e  $y(k)$  no controlador proposto não é tarefa difícil, pois a equação característica da FTMF pode ter raízes em qualquer ponto do plano complexo. Assim, colocando valores reais que não sejam muito

pequenos para as constantes de tempo do sistema, garante-se uma convergência assintótica com muitos valores diferentes, o que por sua vez força o posto da matriz  $A_k$  ser  $2n$  e isto garante a solução do sistema da equação (3-4) (teorema 1 - anexo 1).

Comparando a equação (3-4) com a equação (2-8) percebe-se que tanto para calcular os parâmetros do controlador estabilizante, quanto para identificar os coeficientes do processo, é necessário solucionar um sistema linear de equações algébricas. A solução abaixo, embora tenha sido desenvolvida para a identificação do processo, serve também para o cálculo dos parâmetros do controlador estabilizante.

Agora, apresenta-se a solução geral para a equação (3-4).

Para fazer com que o sistema da equação (3-4) seja sempre não-singular, mesmo quando as linhas da matriz  $A_k$  são linearmente dependentes, vai-se adicionar pequenas perturbações  $G_k^{-1} \hat{x}_{k+1}$  e  $G_k^{-1} \hat{x}_k$  nos lados esquerdo e direito de (3-6), respectivamente. O vetor  $\hat{x}_k$  representa os parâmetros identificados no instante  $k$ . Os autovalores de  $G_k^{-1}$  são bem pequenos, por exemplo, da ordem de  $10^{-9}$ . Assim quando a identificação está terminada, ou seja,  $\hat{x}_{k+1} = \hat{x}_k$ , o efeito das perturbações desaparece e a equação

$$(G_k^{-1} + A_k^T A_k) \hat{x}_{k+1} = A_k^T y_k + G_k^{-1} \hat{x}_k \quad (3-9)$$

se transforma na equação (3-6).

A equação (3-9) tem como solução

$$\hat{x}_{k+1} = \hat{x}_k + G_k A_k^T D_k W_k D_k^T (y_k - A_k \hat{x}_k) \quad (3-10)$$

onde as matrizes  $G_k$ ,  $D_k$  e  $W_k$  são dadas abaixo.

A matriz  $G_k$  é a matriz usada para gerar pequenas perturbações conforme o anteriormente exposto, e é dada por

$$G_k \hat{=} g I \quad (3-11)$$

onde  $g$  é da ordem de  $10^9$ , por exemplo, e  $I$  é a matriz identidade. Apesar de  $g$  ser bastante grande, ele não causa instabilidade numérica. Os diversos resultados obtidos atestam esta afirmação.

A matriz  $D_k$  é formada pelos vetores  $d_1, \dots, d_{2n}$ . Estes vetores são  $(I + A_k G_k A_k^T)$  ortogonais e linearmente independentes. Eles são calculados a partir do conjunto de vetores linearmente independentes dados em (3-15) e pelas equações (3-16) e (3-17).

$$D_k \hat{=} [d_1(k) | d_2(k) | \dots | d_{2n}(k)] \quad (3-12)$$

A matriz  $W_k$  é uma matriz que dá pesos para a representação do vetor  $\hat{x}_{k+1}$  na base dos vetores  $d_1, \dots, d_{2n}$ , e cada elemento da matriz  $W_k$  é calculado pela equação (3-14)

$$W_k \hat{=} \begin{bmatrix} w_1(k) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & w_2(k) & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & w_{2n}(k) \end{bmatrix}, \quad (3-13)$$

$$w_i(k) \triangleq \frac{1}{d_i^T(k)(I + A_k G_k A_k^T) d_i(k)}, \quad (3-14)$$

$\{e_1 | e_2 | \dots | e_{2n}\}$  são linearmente independentes e arbitrários, (3-15)

$$d_1 = e_1, \quad (3-16)$$

$$d_{l+1}(k) = e_{l+1} - \sum_{i=1}^l \frac{e_{l+1}^T (I + A_k G_k A_k^T) d_i(k)}{d_i^T(k)(I + A_k G_k A_k^T) d_i(k)} d_i(k). \quad (3-17)$$

PROVA DA SOLUCAO:

De (3-9) tem-se

$$\hat{x}_{k+1} = (G_k^{-1} + A_k^T A_k)^{-1} A_k^T y_k + (G_k^{-1} + A_k^T A_k)^{-1} G_k^{-1} \hat{x}_k$$

Usando o lema 1 (anexo 1):

$$\begin{aligned} \hat{x}_{k+1} &= [G_k - G_k A_k^T (I + A_k G_k A_k^T)^{-1} A_k G_k] A_k^T y_k + \\ &\quad + [G_k - G_k A_k^T (I + A_k G_k A_k^T)^{-1} A_k G_k] G_k^{-1} \hat{x}_k = \\ &= [G_k A_k^T - G_k A_k^T (I + A_k G_k A_k^T)^{-1} A_k G_k A_k^T] y_k + \\ &\quad + \hat{x}_k - [G_k A_k^T (I + A_k G_k A_k^T)^{-1} A_k^T]^{-1} \hat{x}_k = \\ &= \hat{x}_k + G_k A_k^T [I - (I + A_k G_k A_k^T)^{-1} A_k G_k A_k^T] y_k + \\ &\quad - G_k A_k^T (I + A_k G_k A_k^T)^{-1} A_k \hat{x}_k \end{aligned}$$

Usando o lema 2 (anexo 1):

$$\hat{x}_{k+1} = \hat{x}_k + G_k A_k^T (I + A_k G_k A_k^T)^{-1} (y_k - A_k \hat{x}_k)$$

Pelo lema 4 (anexo 1):

$$\hat{x}_{k+1} = \hat{x}_k + G_k A_k^T D_k W_k D_k^T (y_k - A_k \hat{x}_k)$$

As equações (3-10) a (3-19) definem o algoritmo de identificação proposto.

#### DISCUSSAO DA SOLUCAO

##### CONCLUSAO 1:

Se  $A_k \hat{x}_k = y_k$  então  $\hat{x}_{k+1}$  calculado pelas equações (3-10) a (3-17) é:

$$\hat{x}_{k+1} = \hat{x}_k$$

Prova: Pela equação (3-10)  $\hat{x}_{k+1} = \hat{x}_k$ , ou seja se a identificação foi realizada no instante k, ela permanece no instante k+1.



## CONCLUSÃO 2:

Se

$$1. A_k x^* = y_k ; \quad (3-18)$$

2.  $A_k$  é não-singular;

3.  $\hat{x}_{k+1}$  é solução do sistema da equação (3-9);

então o erro  $\varepsilon_{k+1}$  entre  $x^*$  e  $\hat{x}_{k+1}$  é

$$\varepsilon_{k+1} \triangleq x^* - \hat{x}_{k+1}$$

$$\varepsilon_{k+1} = [(A_k^T A_k)^{-1} - (A_k^T A_k + G_k^{-1})^{-1}] A_k^T (y_k - A_k \hat{x}_k) \quad (3-19)$$

Prova:

De (3-18) pode-se escrever

$$A_k^T A_k x^* = A_k^T y_k$$

$$(G_k^{-1} + A_k^T A_k) x^* = A_k^T y_k + G_k^{-1} x^*$$

Como  $x^* = A_k^{-1} y_k$ , e dado que  $A_k$  é não-singular, tem-se

$$(G_k^{-1} + A_k^T A_k) x^* = A_k^T y_k + G_k^{-1} A_k^{-1} y_k \quad (3-20)$$

Subtraindo (3-9) de (3-20), tem-se

$$(G_k^{-1} + A_k^T A_k) \varepsilon_{k+1} = G_k^{-1} A_k^{-1} (y_k - A_k \hat{x}_k)$$

$$(G_k^{-1} + A_k^T A_k) \varepsilon_{k+1} = G_k^{-1} A_k^{-1} (A_k^T)^{-1} (A_k^T y_k - A_k^T A_k \hat{x}_k)$$

$$(G_k^{-1} + A_k^T A_k) \varepsilon_{k+1} = G_k^{-1} (A_k^T A_k)^{-1} (A_k^T y_k - A_k^T A_k \hat{x}_k)$$

Então

$$\varepsilon_{k+1} = (G_k^{-1} + A_k^T A_k)^{-1} G_k^{-1} (A_k^T A_k)^{-1} (A_k^T y_k - A_k^T A_k \hat{x}_k)$$

Como (lema 5 - anexo 1)

$$(G_k^{-1} + A_k^T A_k)^{-1} = G_k - G_k A_k^T A_k (I + G_k A_k^T A_k)^{-1} G_k$$

tem-se

$$\varepsilon_{k+1} = [G_k - G_k A_k^T A_k (I + G_k A_k^T A_k)^{-1} G_k] G_k^{-1} (A_k^T A_k)^{-1} [A_k^T y_k - A_k^T A_k \hat{x}_k]$$

$$\varepsilon_{k+1} = [(A_k^T A_k)^{-1} - G_k A_k^T A_k (I + G_k A_k^T A_k)^{-1} (A_k^T A_k)^{-1}] [A_k^T y_k - A_k^T A_k \hat{x}_k]$$

$$\delta_{k+1} = [(A_k^T A_k)^{-1} - [(A_k^T A_k) (I + G_k A_k^T A_k) (A_k^T A_k)^{-1} G_k^{-1}]^{-1}]$$

$$\varepsilon_{k+1} = \delta_{k+1} (A_k^T y_k - A_k^T A_k \hat{x}_k)$$

$$\varepsilon_{k+1} = [(A_k^T A_k)^{-1} - [G_k^{-1} + (A_k^T A_k)]^{-1}] (A_k^T y_k - A_k^T A_k \hat{x}_k)$$

$$\varepsilon_{k+1} = [(A_k^T A_k)^{-1} - [A_k^T A_k + G_k^{-1}]^{-1}] A_k^T (y_k - A_k \hat{x}_k) \quad (3-21)$$

Observando a equação (3-19) pode-se perceber que o erro entre a solução verdadeira ( $x^*$ ) e a solução aproximada ( $\hat{x}_{k+1}$ ) é muito pequena, uma vez que  $(A_k^T A_k)^{-1}$  é aproximadamente igual a  $(A_k^T A_k + G_k^{-1})^{-1}$ . O erro dado na equação (3-19) não deve ser aplicado no início da operação do sistema e nem no início de uma re-identificação após uma mudança do processo, pois embora a matriz  $A_k$  tenha posto  $(2n)$ , ela contém valores do antigo e do novo processo ao mesmo tempo, e isto implica em que, neste intervalo de tempo, os parâmetros fornecidos pelo identificador diferem dos parâmetros reais do processo.

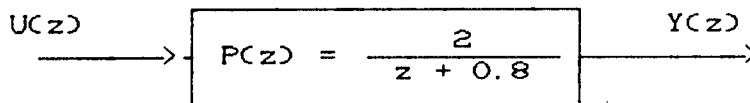
### 3.3 - ESTUDO DE CASOS

Abaixo vai-se mostrar alguns casos para validar a solução proposta.

#### 3.3.1. PROCESSO DE PRIMEIRA ORDEM.<sup>1</sup>

Identificação simples, sem mudança de parâmetros.

A entrada  $u(k)$  é pseudo-aleatória até a iteração 15, depois fica constante igual a um.

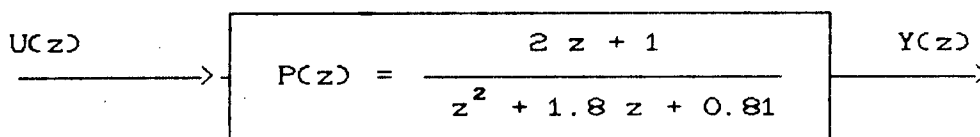


Neste caso temos  $a_1 = 0.8$  e  $b_1 = 2$ .

#### 3.3.2. PROCESSO DE SEGUNDA ORDEM.<sup>2</sup>

Identificação simples, sem mudança nos parâmetros.

A entrada  $u(k)$  é pseudo-aleatória até a iteração 15, depois fica constante igual a um.



Neste caso temos  $a_1 = 1.8$ ,  $a_2 = 0.81$ ,  $b_1 = 2$  e  $b_2 = 1$ .

---

<sup>1</sup>Os gráficos são mostrados nas páginas 53 e 54.

<sup>2</sup>Os gráficos são mostrados nas páginas 55, 56 e 57.

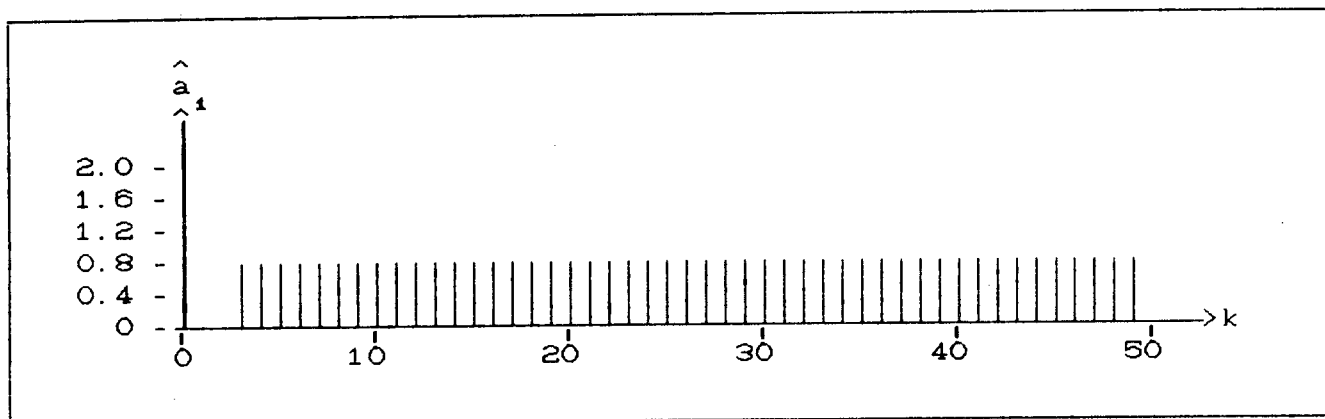


Fig. 3.1 - Parâmetro  $\hat{a}_1$  identificado no exemplo 3.3.1.

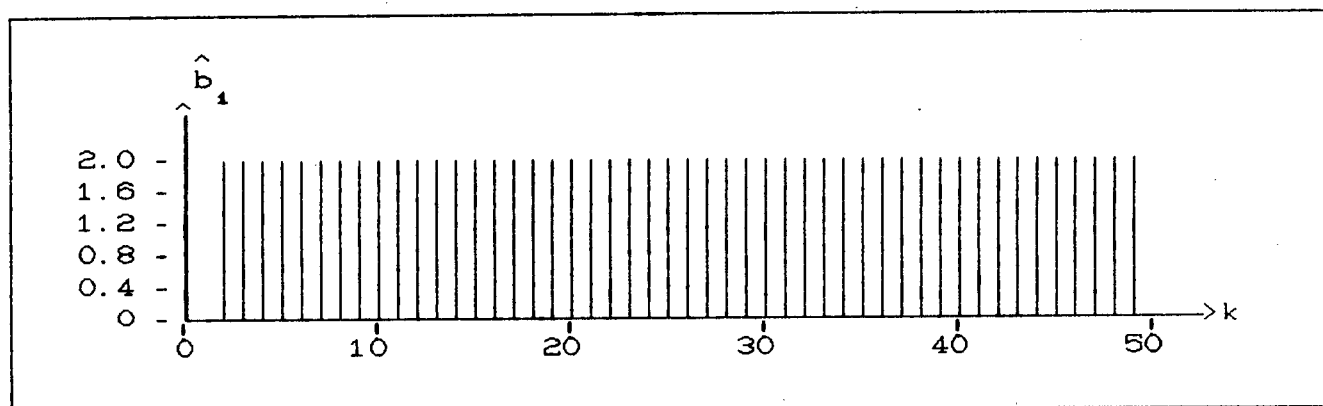


Fig 3.2 - Parâmetro  $\hat{b}_1$  identificado no exemplo 3.3.1

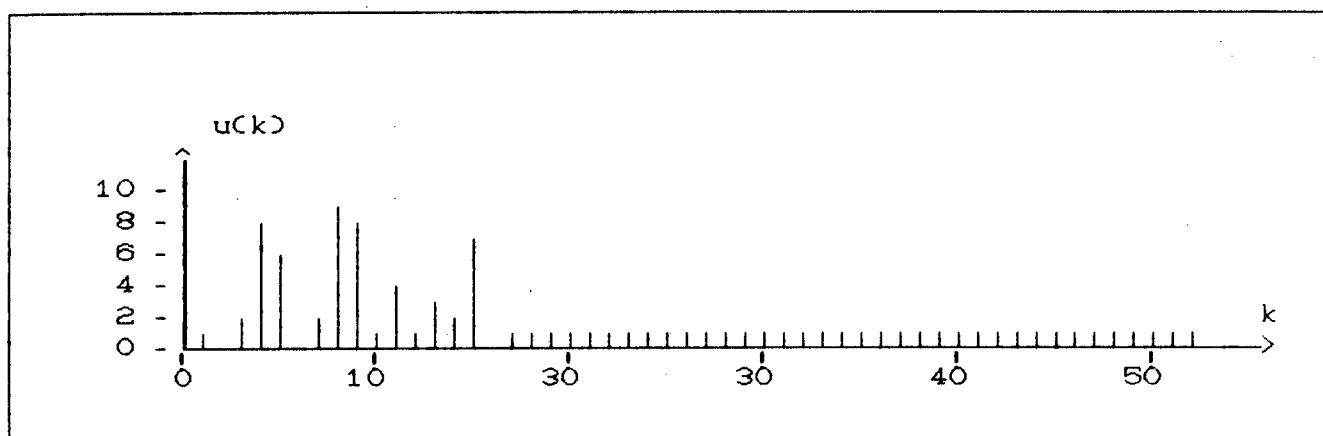


Fig. 3.3 - Gráfico da entrada do exemplo 3.3.1.

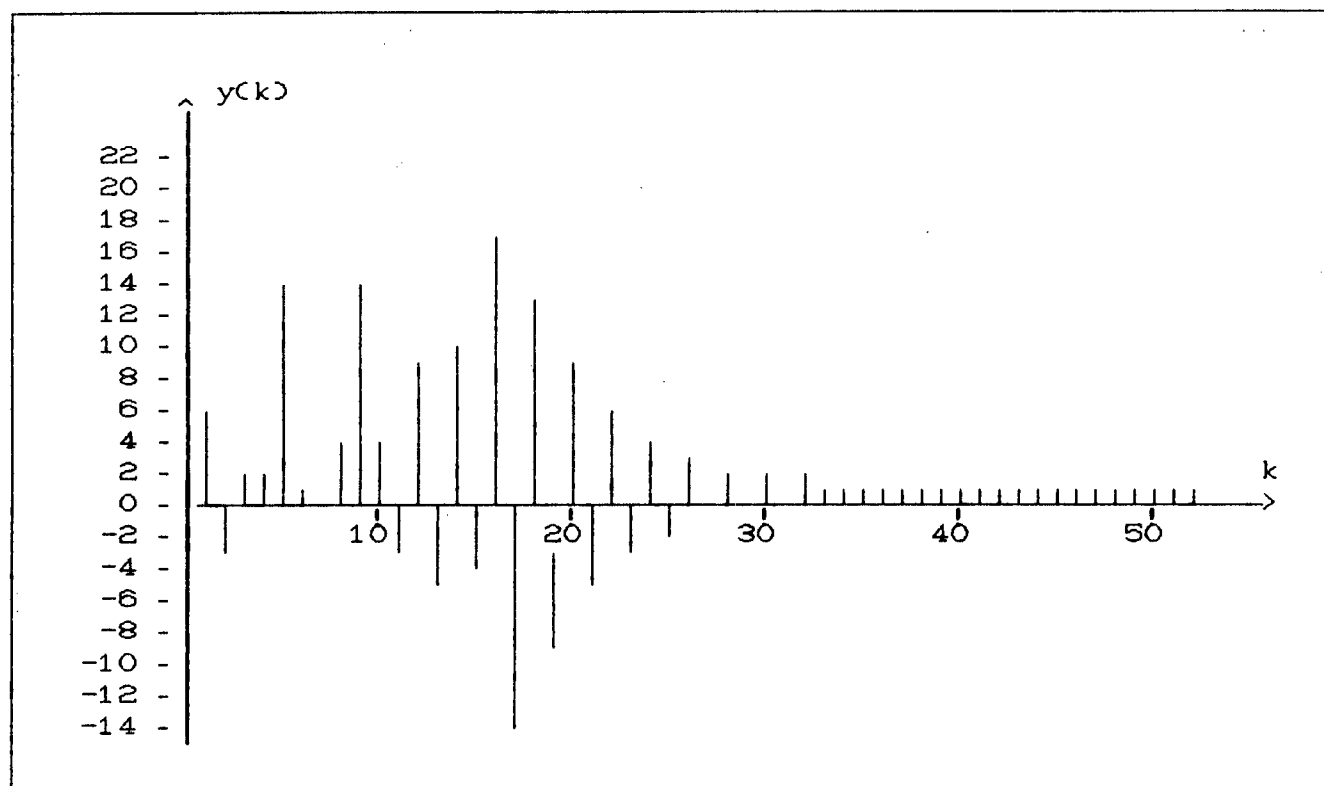


Fig. 3.4 - Gráfico da saída do exemplo 3.3.1.

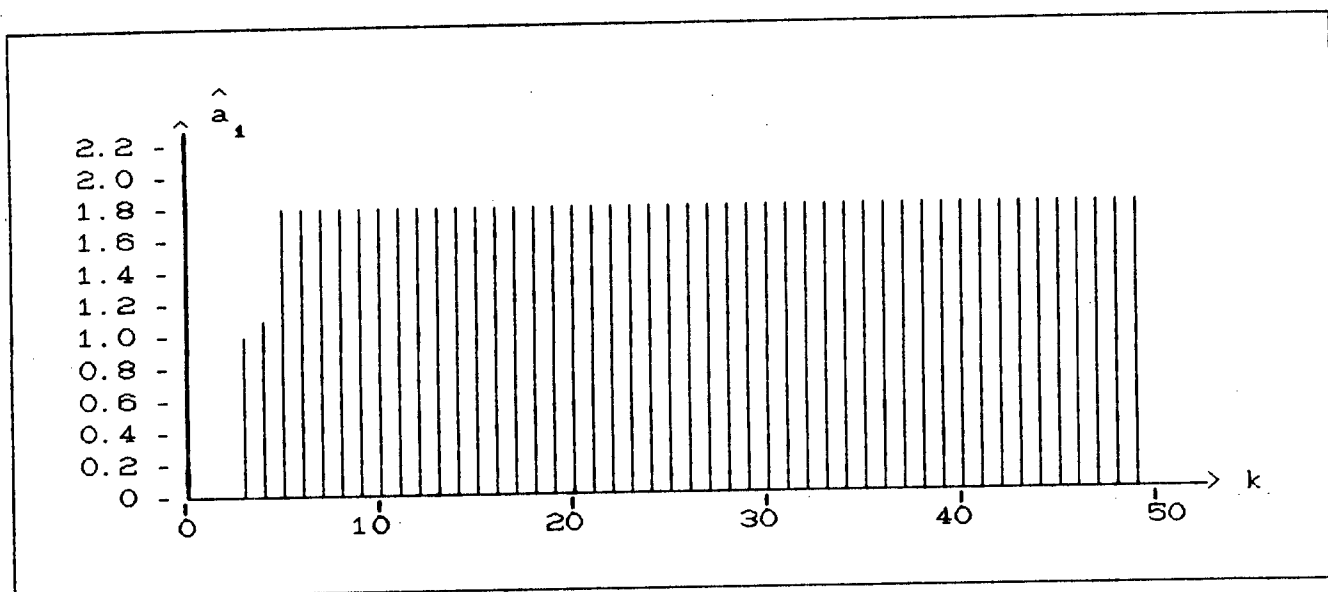


Fig. 3.5 - Parâmetro  $\hat{a}_1$  identificado no exemplo 3.3.2.

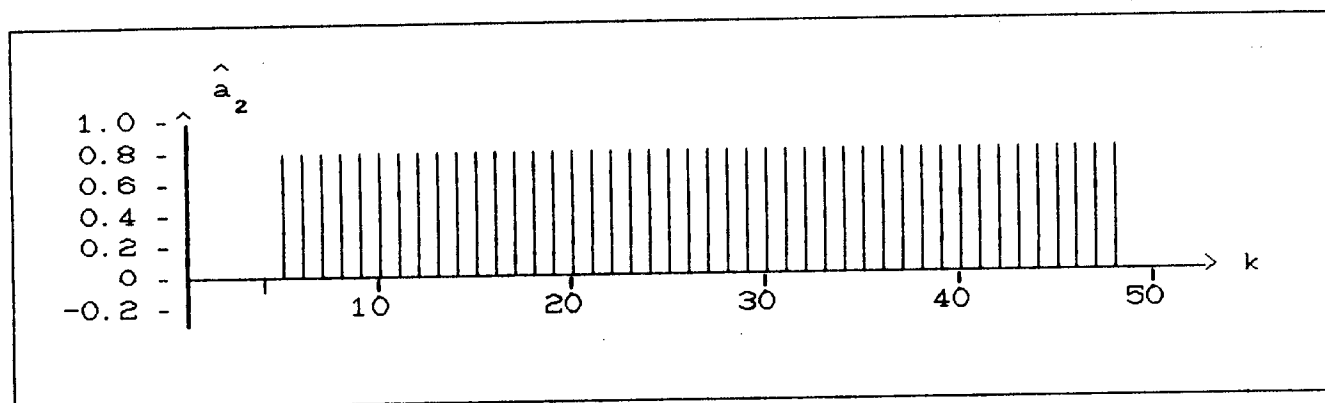


Fig. 3.6 - Parâmetro  $\hat{a}_2$  identificado no exemplo 3.3.2.

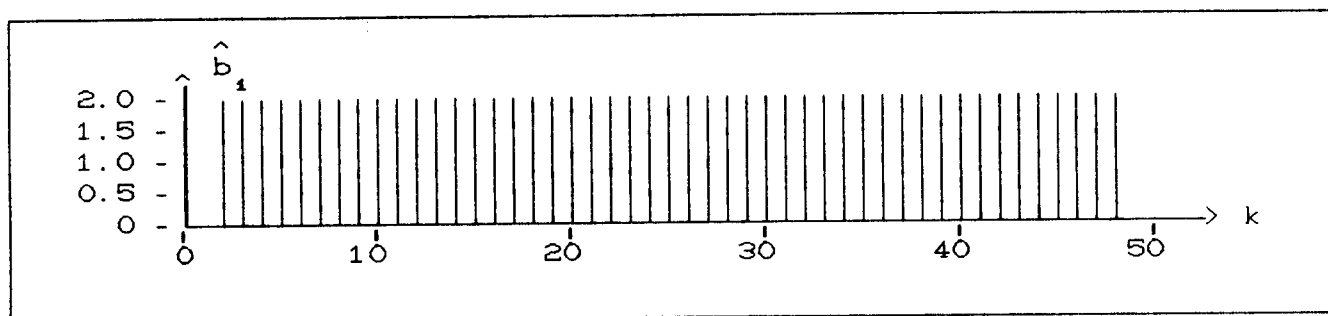


Fig. 3.7 - Parâmetro  $\hat{b}_1$  identificado no exemplo 3.3.2.

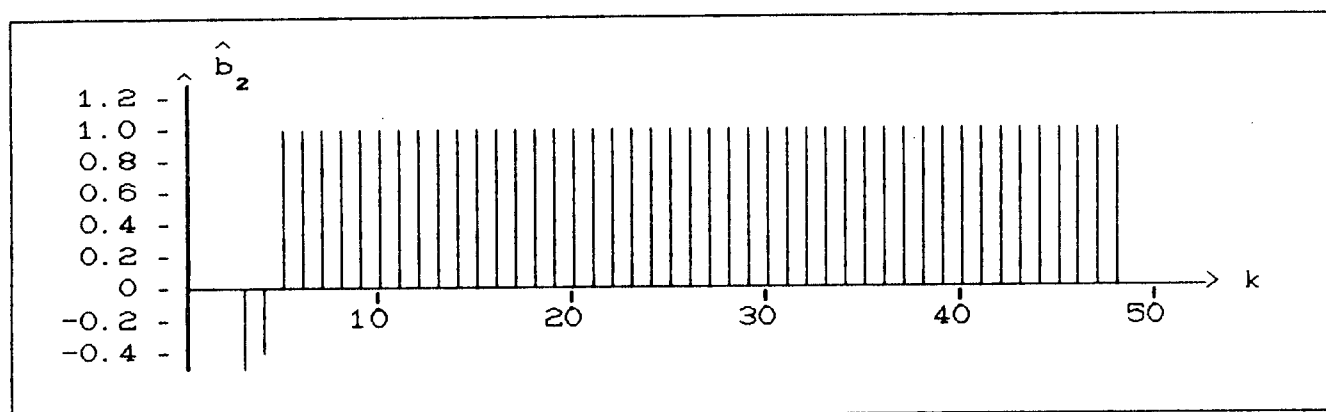


Fig. 3.8 - Parâmetro  $\hat{b}_2$  identificado no exemplo 3.3.2.



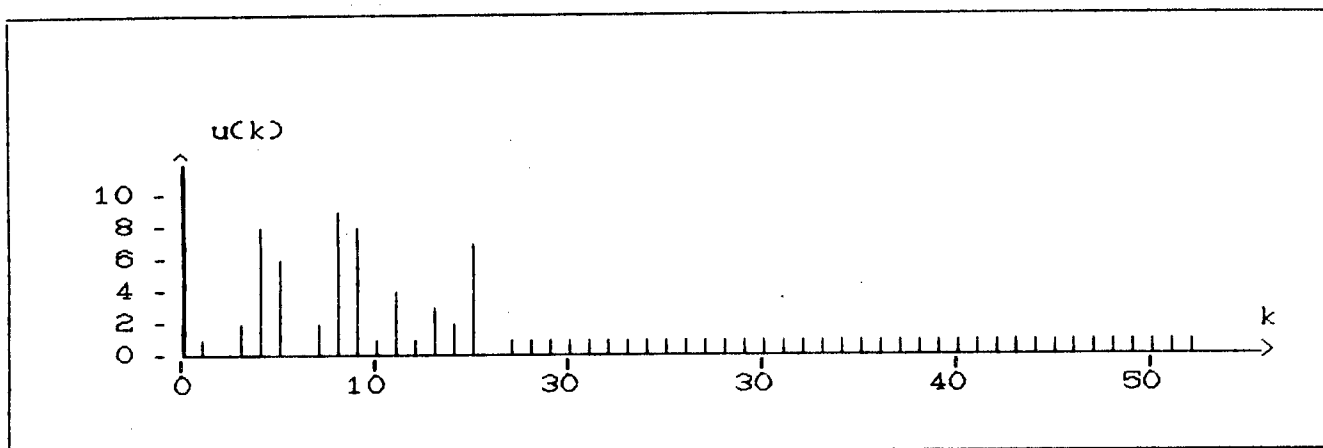


Fig. 3.9 - Gráfico da entrada do exemplo 3.3.2.

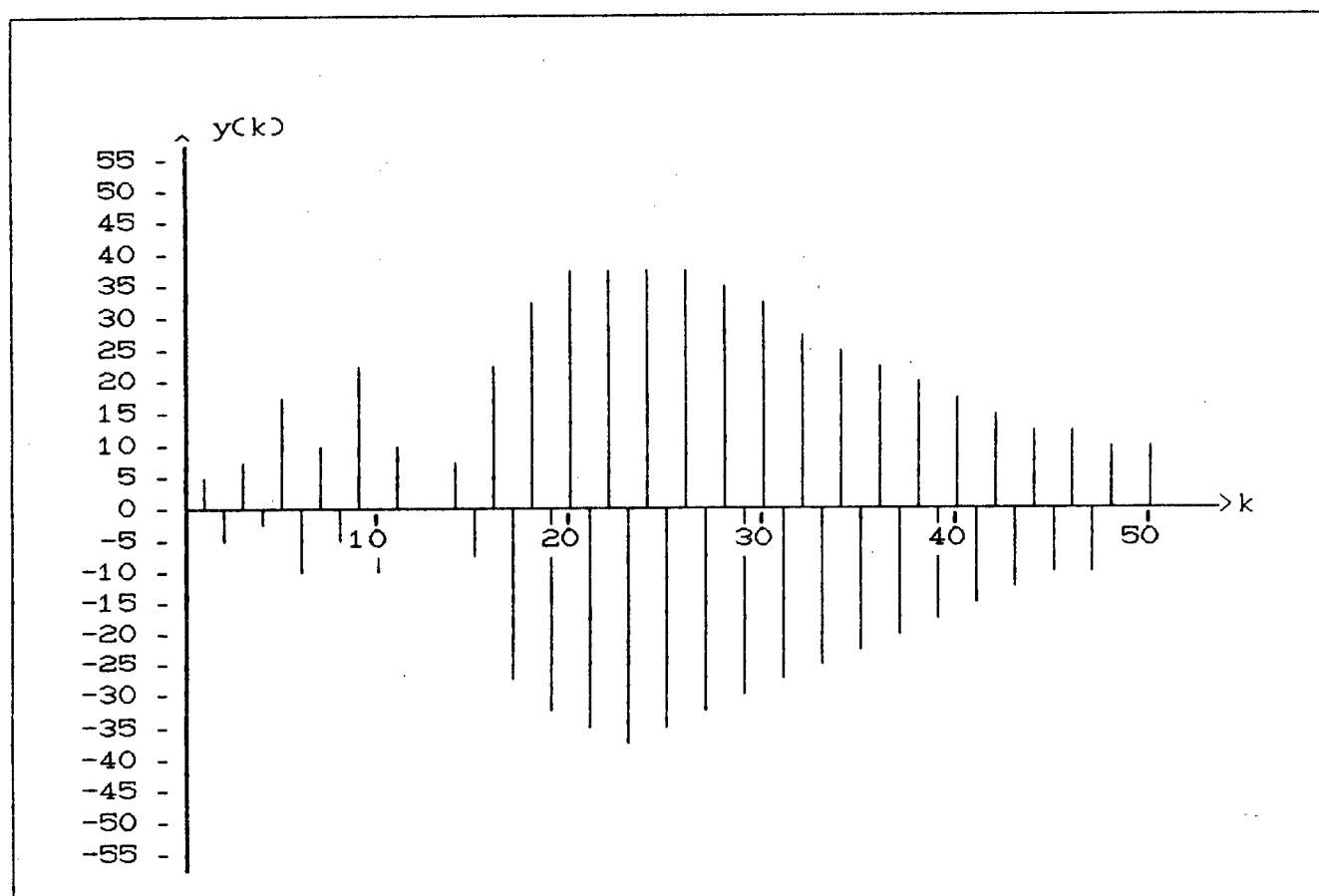


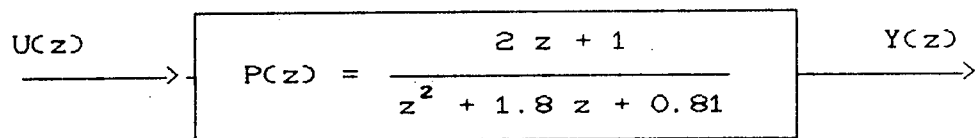
Fig. 3.10 - Gráfico da saída do exemplo 3.3.2.

### 3.3.3. PROCESSO DE SEGUNDA ORDEM.<sup>a</sup>

Identificação com mudança de parâmetros na vigésima primeira iteração.

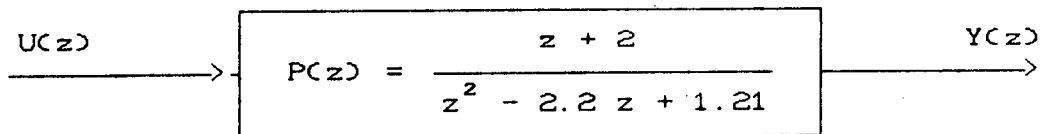
A entrada  $u(k)$  é pseudo-aleatória.

Processo antes da mudança (para  $k \leq 20$ ):



Neste caso temos  $a_1 = 1.8$ ,  $a_2 = 0.81$ ,  $b_1 = 2$  e  $b_2 = 1$ .

Processo depois da mudança (para  $k > 20$ ):



Neste caso temos  $a_1 = -2.2$ ,  $a_2 = 1.21$ ,  $b_1 = 1$  e  $b_2 = 2$ .

---

<sup>a</sup>Os gráficos são mostrados nas páginas 59 e 60.

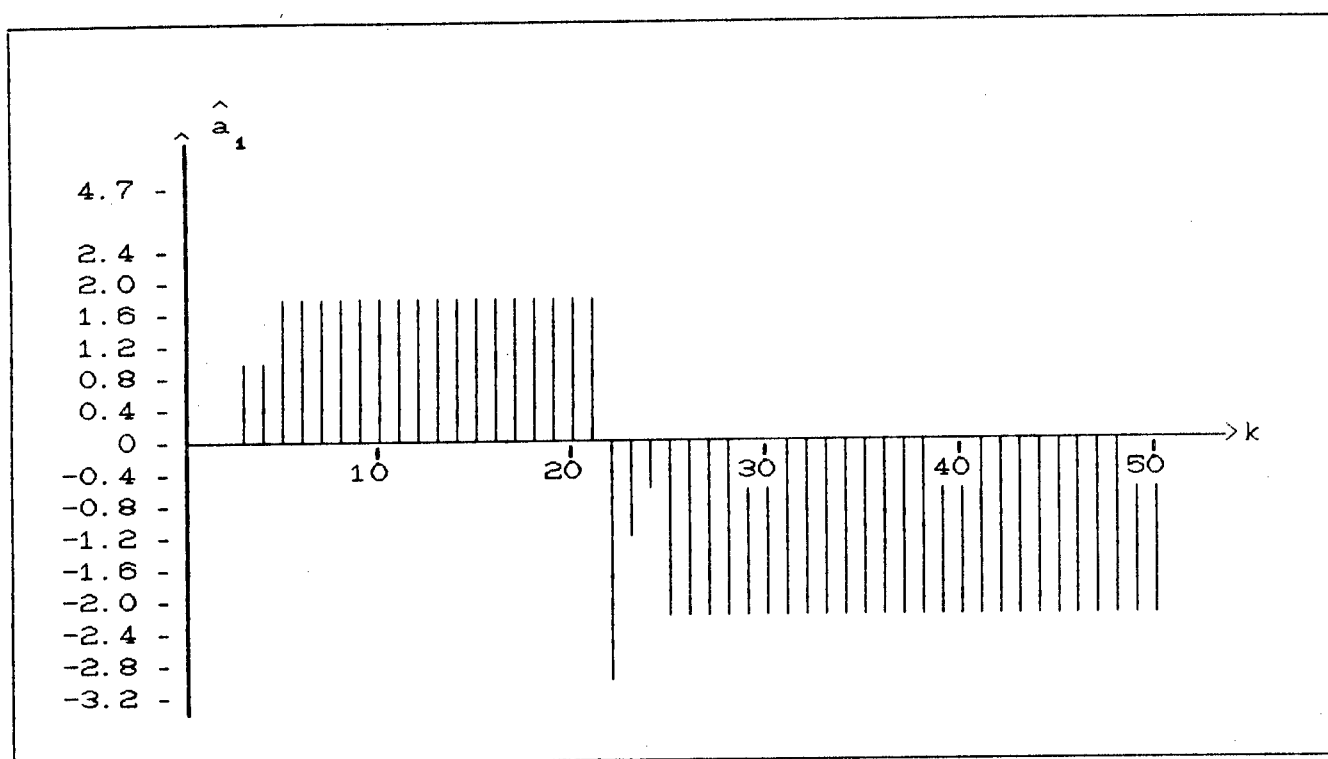


Fig. 3.11 - Parâmetro  $\hat{a}_1$  identificado no exemplo 3.3.3.

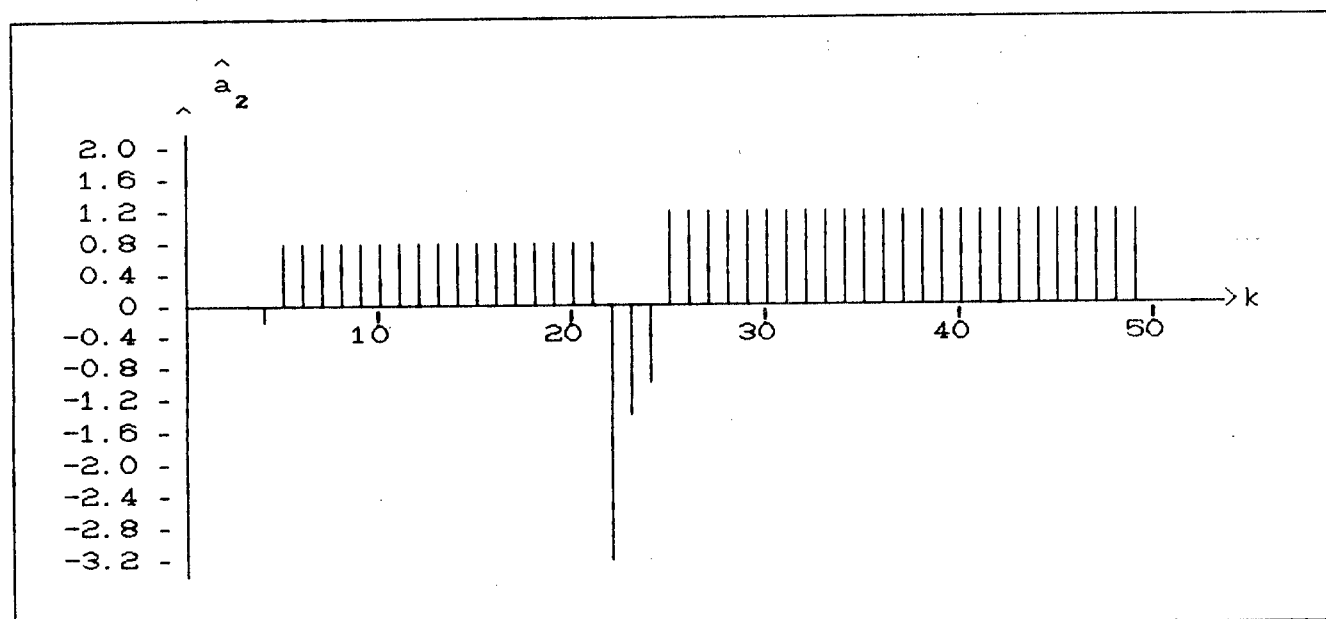


Fig. 3.12 - Parâmetro  $\hat{a}_2$  identificado no exemplo 3.3.3.

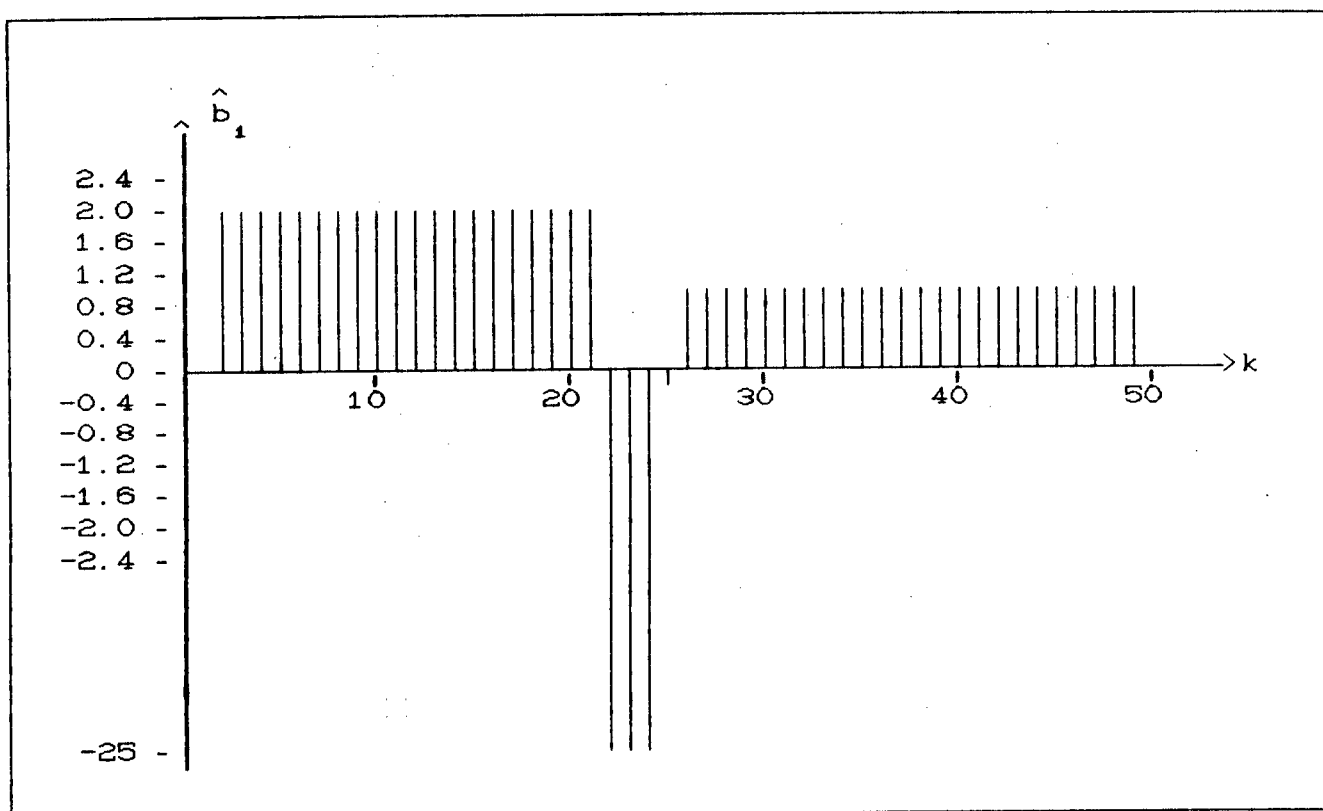


Fig. 3.13 - Parâmetro  $\hat{b}_1$  identificado no exemplo 3.3.3.

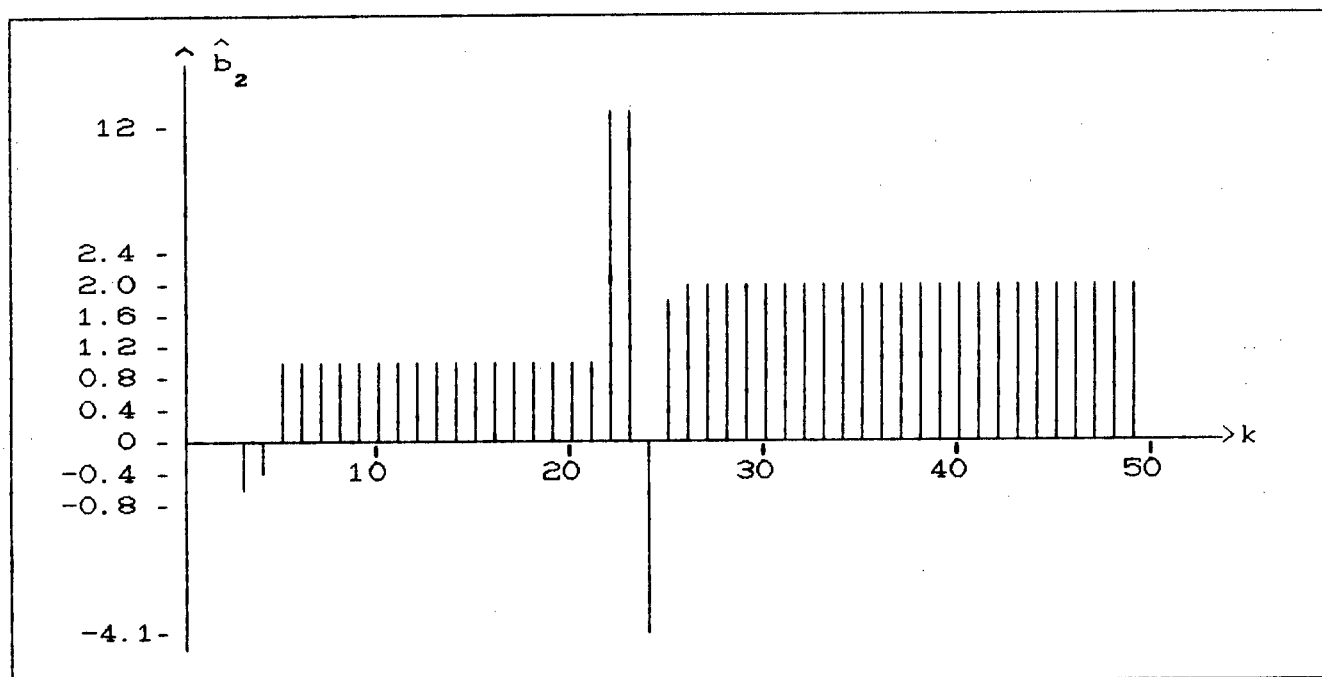


Fig. 3.14 - Parâmetro  $\hat{b}_2$  identificado no exemplo 3.3.3.

O gráfico da entrada e saída do exemplo 3.3.3 não será mostrado porque os valores do mesmo varia desde valores pequenos até valores muito grandes. Esta excursão a valores elevados se deve ao fato do processo tornar-se instável após a iteração 21. No entanto, no anexo 3 são fornecidas tabelas com os dados de todos os exemplos. O leitor pode dirigir-se a este anexo para qualquer consulta mais detalhada sobre os valores dos gráficos.

#### 3.2.4 - CONCLUSOES

Através dos três exemplos acima pode-se observar que o identificador atende às características anunciadas na introdução do capítulo. As características obtidas foram:

Ele é rápido: precisa apenas de  $(2n)$  iterações para ser re-identificado e  $(3n-1)$  iterações para a identificação inicial. Isto pode ser observado no caso 3.3.3.

Ele tem boa estabilidade numérica quando a entrada e a saída formam vetores linearmente dependentes. Isto pode ser visto nos casos 3.3.1 e 3.3.2, apesar de ser usado o parâmetro  $g$  da ordem de  $10^9$ .

Ele é recursivo e não tem inversão de matriz e nem de escalar, como pode ser visto nas equações de (3-10) a (3-19).

Como pode-se verificar pelos exemplos e equações acima, o identificador tem bons atributos, entretanto, como em qualquer identificador, ele tem uma característica indesejável: no início de uma re-identificação ele fornece valores errados dos parâmetros, devido ao fato do sistema linear de equações algébricas possuir valores do velho e do novo processo, ao mesmo tempo. Entretanto, isto não traz maiores problemas quando a variação nos parâmetros do processo é lenta e de pequena amplitude e quando este esquema é usado em controle adaptativo.

O método aqui apresentado possui qualidades que podem colocá-lo no nível de outros identificadores muito utilizados, como por exemplo os identificadores por mínimos quadrados recursivos e máxima verossemelhança (maximum likelihood), sendo ainda que o método aqui apresentado, é um método de identificação em tempo finito, em contraste com muitos tipos de identificadores que tem convergência assintótica.

## Capítulo 4 - O SISTEMA ADAPTATIVO

### 4.1 - INTRODUÇÃO

Nos capítulos 2 e 3 pode-se analisar separadamente o controlador e o identificador, respectivamente. Agora, no capítulo 4, vai-se estudar um mecanismo de adaptação, baseado no controlador e no identificador já estudados. Este mecanismo de adaptação, junto com o controlador, com o identificador e com o processo, formam um sistema de controle adaptativo indireto [2] ou auto-ajustável [2,3]. Este tipo de sistema adaptativo, diferentemente dos sistemas adaptativos diretos [2,26], utiliza uma identificação explícita dos parâmetros do processo.

Considere a figura 4.1.

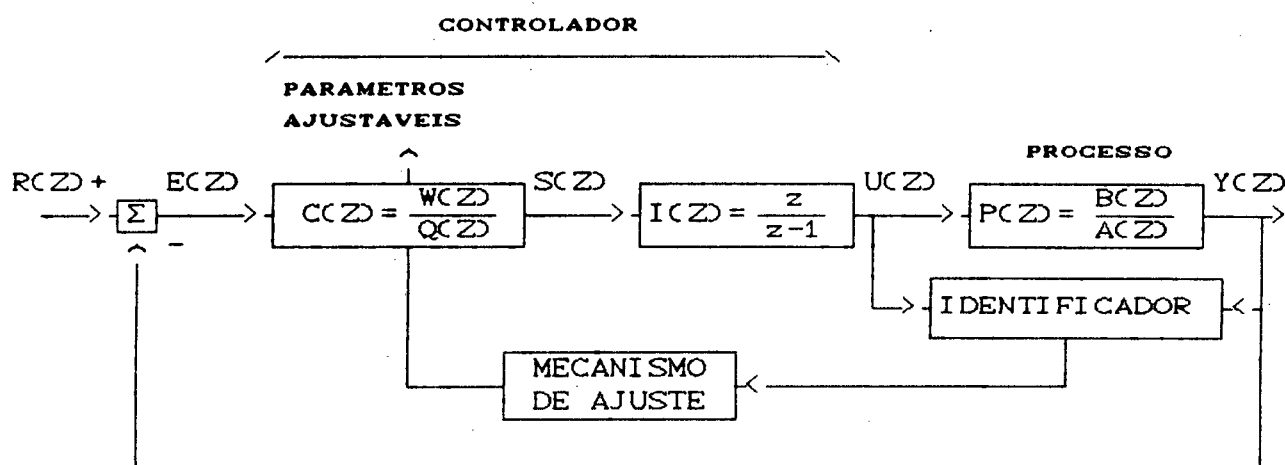


Fig. 4.1 - Diagrama de blocos do sistema adaptativo.

A sequência básica de operação do sistema adaptativo é:

1. O identificador consegue, em poucas iterações do sistema, identificar os parâmetros do processo.

2. A partir dos parâmetros identificados do processo é feito o ajuste dos parâmetros do controlador de forma que a FTMF tenha a equação característica desejada.

Características importantes do sistema adaptativo:

1. O identificador é rápido, portanto o controlador se adapta rapidamente ao novo processo, em um número finito de iterações após a mudança dos parâmetros.

2. No intervalo de tempo em que o processo mudou e o novo processo ainda não foi identificado, o identificador pode apresentar valores diferentes dos valores reais dos parâmetros do novo processo. Entretanto, pode-se, heurísticamente, utilizar o artifício computacional de usar os últimos coeficientes identificados até que o novo processo esteja completamente identificado. Isto reduz substancialmente o erro durante a fase de adaptação, principalmente para variações de pequena amplitude nos parâmetros do processo.

3. Para o início de operação deve-se colocar valores diferentes de zero para os parâmetros do controlador estabilizante, pois caso contrário o sistema não consegue começar



a operar. O controlador estabilizante pode partir com qualquer condição inicial diferente de zero para o valor dos seus parâmetros. Entretanto, caso se conheça de antemão os parâmetros do processo, pode-se fazer o controlador estabilizante partir com valores que façam a equação característica da FTMF ser a desejada.

4. Deve haver um espaço mínimo de  $(2n)$  iterações para ocorrer nova variação nos parâmetros do processo. Este espaço é necessário pois é preciso terminar uma identificação completa antes de iniciar outra. Em verdade, o espaço deve ser maior do que  $(2n)$  iterações, para dar tempo para o sistema estabilizar após a nova identificação. Caso ocorra uma nova mudança nos parâmetros do processo antes que o sistema tenha estabilizado, a resposta torna-se flutuante fazendo com que um erro diferente de zero persista por um longo período de tempo. O espaço adicional às  $(2n)$  iterações necessárias para a nova identificação, depende da localização dos polos da equação característica desejada para a FTMF. Quanto mais próximo do círculo unitário estiver a parte real dos polos da equação característica da FTMF, maior é o espaço necessário entre as mudanças dos parâmetros do processo pois mais lenta é a resposta do sistema.

#### 4.2 - O MECANISMO DE AJUSTE

O mecanismo de ajuste atua diretamente nos parâmetros do controlador estabilizante. A cada iteração do sistema é feita uma identificação do processo. Os parâmetros identificados entram no sistema da equação (2-8), repetida abaixo (4-1), a qual fornece os parâmetros do controlador estabilizante; estes parâmetros são

então, sobre-escritos nos parâmetros do controlador estabilizante.

A cada iteração do sistema os parâmetros do controlador estabilizante são atualizados.

$$P_p \cdot p_c = f_d \quad (4-1)$$

onde

$$h = 2(n+1)$$

$P_p$  de dimensão  $(h \times h)$ , é a matriz dos parâmetros do processo,

$p_c$  de dimensão  $(h \times 1)$ , é o vetor dos parâmetros do controlador,

$f_d$  de dimensão  $(h \times 1)$ , é o vetor dos parâmetros da equação característica desejada da FTMF junto com parâmetros do processo,

$$P_p = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \alpha_1 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & b_1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \alpha_2 & \alpha_1 & 1 & 0 & \dots & 0 & b_2 & b_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \alpha_3 & \alpha_2 & \alpha_1 & 1 & \dots & 0 & b_3 & b_2 & b_1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \alpha_n & \alpha_{n-1} & \alpha_{n-2} & \alpha_{n-3} & \dots & 1 & b_n & b_{n-1} & b_{n-2} & b_{n-3} & \dots & b_1 \\ \alpha_{n+1} & \alpha_n & \alpha_{n-1} & \alpha_{n-2} & \dots & \alpha_1 & 0 & b_n & b_{n-1} & b_{n-2} & \dots & b_2 \\ 0 & \alpha_{n+1} & \alpha_n & \alpha_{n-1} & \dots & \alpha_2 & 0 & 0 & b_n & b_{n-1} & \dots & b_3 \\ 0 & 0 & \alpha_{n+1} & \alpha_n & \dots & \alpha_3 & 0 & 0 & 0 & b_n & \dots & b_4 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha_{n+1} & \dots & \alpha_4 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & b_5 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \alpha_{n+1} & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix},$$

$$p_c = \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ \vdots \\ q_{n+1} \\ w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_{n+1} \end{bmatrix}, \quad f_d = \begin{bmatrix} f_1 - a_1 + a_0 \\ f_2 - a_2 + a_1 \\ \vdots \\ f_{n+1} - a_{n+1} + a_n \\ f_{n+2} \\ f_{n+3} \\ \vdots \\ f_{2(n+1)} \end{bmatrix}, \quad \begin{aligned} \therefore a_0 &\hat{=} 1 \\ a_{n+1} &\hat{=} 0 \end{aligned}$$

onde

$$\alpha_1 = a_1 - 1,$$

$$\alpha_2 = a_2 - a_1,$$

$$\alpha_3 = a_3 - a_2,$$

$\vdots$

$$\alpha_{n+1} = -a_n.$$

Para solucionar o sistema da equação (4-1) é utilizado o mesmo algoritmo usado na identificação, o qual é re-apresentado abaixo.

$$\hat{P}_p(k) \hat{p}_c(k+1) = \hat{f}_d(k) \quad (4-2)$$

onde  $\hat{P}_p(k)$ ,  $\hat{p}_c(k)$  e  $\hat{f}_d(k)$  tem a mesma estrutura que  $P_p$ ,  $p_c$  e  $f_d$ , e são obtidos substituindo-se  $a_i$  e  $b_i$  por  $\hat{a}_i(k)$  e  $\hat{b}_i(k)$ , e  $w_i$  e  $q_i$  por  $\hat{w}_i(k)$  e  $\hat{q}_i(k)$  e  $\alpha_i$  por  $\hat{\alpha}_i$ , respectivamente.

Usando-se raciocínio semelhante ao apresentado no capítulo 3 para o identificador, pode-se escrever:

$$[G_k^{-1} + \hat{P}_p^T(k)\hat{P}_p(k)] \hat{p}_c(k+1) = \hat{P}_p^T(k)\hat{f}_d(k) + G_k^{-1}\hat{p}_c(k) \quad (4-3)$$

A equação (4-3) tem como solução, conforme capítulo 3:

$$\hat{p}_c(k+1) = \hat{p}_c(k) + G(k)\hat{P}_p^T(k)D(k)W(k)D^T(k)[\hat{f}_d(k) - \hat{P}_p^T(k)\hat{p}_c(k)]$$

onde as matrizes  $G(k)$ ,  $D(k)$  e  $W(k)$  são dadas como segue.

A matriz  $G(k)$  é a matriz usada para gerar pequenas perturbações conforme o anteriormente exposto, e é dada por

$$G(k) \hat{=} g I \quad (4-4)$$

onde  $g$  é da ordem de  $10^0$ , por exemplo e  $I$  é a matriz identidade.

A matriz  $D(k)$  é formada pelos vetores  $d_1, \dots, d_{2n}$ . Estes vetores são  $[I + \hat{P}_p(k)G(k)\hat{P}_p^T(k)]$  ortogonais e linearmente independentes. Eles são calculados a partir do conjunto de vetores linearmente independentes dados em (4-8) e pelas equações (4-9) e (4-10)

$$D_k \hat{=} [d_1(k) | d_2(k) | \dots | d_{2n}(k)] \quad (4-5)$$

A matriz  $W(k)$  é uma matriz que dá pesos para a representação do vetor  $\hat{p}_c(k+1)$  na base dos vetores  $d_1(k), \dots, d_{2n}(k)$ , e cada elemento da matriz  $W(k)$  é calculado pela equação (4-7)

$$W_k \hat{=} \begin{bmatrix} w_1(k) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & w_2(k) & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & w_{2n}(k) \end{bmatrix}, \quad (4-6)$$

$$w_i(k) \hat{=} \frac{1}{d_i^T(k) [I + \hat{P}_p(k) G(k) \hat{P}_p^T(k)] d_i(k)}, \quad (4-7)$$

$(e_1 \parallel e_2 \parallel \dots \parallel e_{2n})$  são linearmente independentes e arbitrários, (4-8)

$$d_1 = e_1, \quad (4-9)$$

$$d_{l+1}(k) = e_{l+1} - \sum_{i=1}^l \frac{e_{l+1}^T [I + \hat{P}_p(k) G(k) \hat{P}_p^T(k)] d_i(k)}{d_i^T(k) [I + \hat{P}_p(k) G(k) \hat{P}_p^T(k)] d_i(k)} d_i(k), \quad (4-10)$$

#### 4.3. ESTUDO DE CASOS

Feitas as considerações iniciais, vai-se simular agora alguns dos processos mostrados no capítulo 2. Depois são simulados alguns sistemas que tem como característica principal uma variação lenta, discreta e de pequena amplitude nos parâmetros do processo. Para estes sistemas vai-se fazer dois tipos de simulação: Uma sem a retenção dos últimos parâmetros identificados e outra com a retenção dos referidos parâmetros durante a nova identificação.

O motivo de criar um mecanismo de retenção dos parâmetros é o seguinte: Ocorrendo uma mudança nos parâmetros do processo após o mesmo estar em regime, o sistema passa por um

período transitório até que os novos parâmetros estejam completamente identificados, e que o sistema entre em regime novamente. Durante o período em que o novo processo ainda não foi completamente identificado, o identificador fornece ao mecanismo de ajuste valores errados dos parâmetros do processo, que em geral são completamente diferentes dos valores reais dos mesmos. Estes valores, através do mecanismo de ajuste, alteram o controlador estabilizante. A equação característica do sistema fica então, diferente da desejada, podendo até deixar o sistema instável, com grandes oscilações. Nesta situação o erro dado pela equação (3-19) não deve ser utilizado, pois o mesmo se aplica apenas quando a matriz  $A_k$  possui valores relativos a um único processo, fato que não ocorre no início do transitório.

Para evitar que o identificador forneça valores muito diferentes dos valores reais do processo, durante o transitório, o mesmo é forçado a continuar fornecendo os antigos valores dos parâmetros, até que o novo processo esteja completamente identificado, quando então começa a fornecer os novos valores dos parâmetros do processo. Assim, considerando que o sistema de controle é robusto, a menos que seja instável, e que é pressuposta uma mudança de pequena amplitude nos parâmetros do processo, pode-se dizer que a retenção dos parâmetros melhora a resposta do sistema, durante a fase de adaptação, conforme pode-se verificar nos casos 4.4.3 e 4.4.4.

Na última parte deste capítulo compara-se e comenta-se os resultados obtidos nos casos estudados.

#### 4.4.1. ESTAVEL PARA INSTAVEL<sup>1</sup>

##### PRIMEIRA ORDEM

##### REFERENCIA TIPO DEGRAU

Processo antes da mudança:  $P(z) = \frac{1}{z+0.9}$

onde  $a_1 = 0.9$  e  $b_1 = 1$ .

Processo depois da mudança:  $P(z) = \frac{2}{z+2}$

onde  $a_1 = 2$  e  $b_1 = 2$ .

O processo muda na iteração número setenta, sem retenção dos últimos parâmetros identificados.

A equação característica desejada da FTMF é:

$$ECD(z) = z^4 - 2.1 z^3 + 1.47 z^2 - 0.343 z$$

Para a equação característica ao invés de desenhar um gráfico com os valores reais dos parâmetros da mesma, vai-se desenhar um gráfico que mostra a norma da diferença entre os vetores  $f_r$  e  $f_d$ , onde  $f_r$  é o vetor que contém os parâmetros reais da equação característica e o vetor  $f_d$  contém os parâmetros

-----  
<sup>1</sup>Os gráficos são mostrados nas páginas 73,74 e 75.

desejados para a equação característica da FTMF. Assim, quando a equação característica real da FTMF for igual a equação característica desejada para a FTMF, o valor da norma da diferença é zero. De outra maneira,

$$f_r = \begin{bmatrix} f_{1r} \\ \vdots \\ f_{(2n+1)r} \end{bmatrix} \quad f_d = \begin{bmatrix} f_{1d} \\ \vdots \\ f_{(2n+1)d} \end{bmatrix}$$

Seja o vetor de erro

$$f_e = f_r - f_d$$

$$|f_e| = \sqrt{f_{1e}^2 + \dots + f_{(2n+1)e}^2}$$



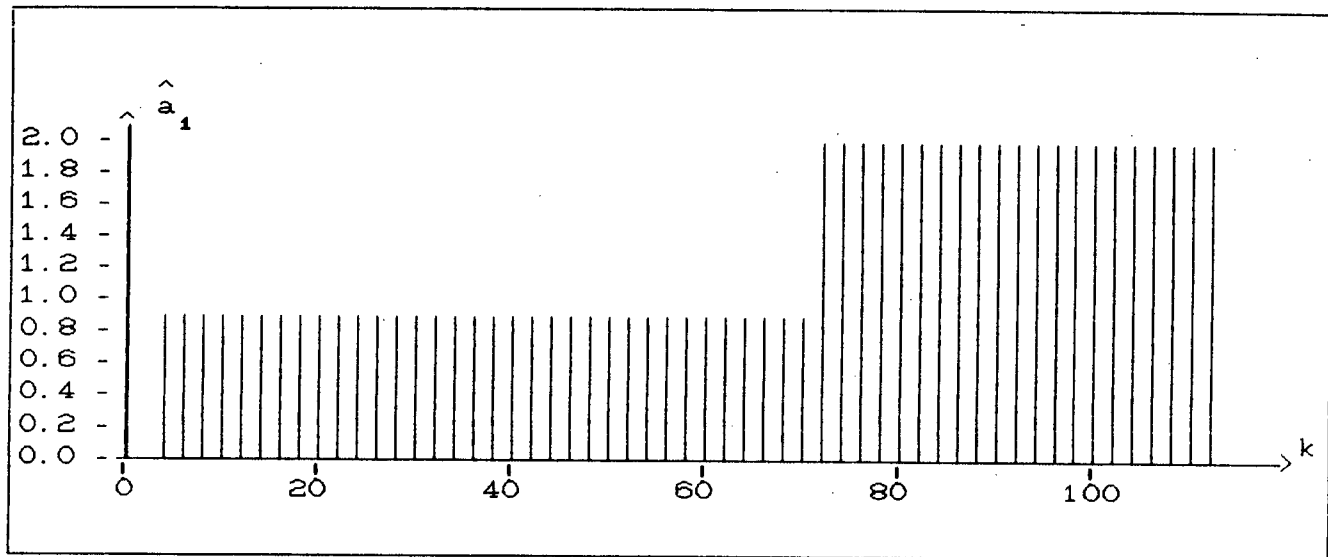


Fig. 4.2 - Parâmetro " $\hat{a}_1$ " identificado no caso 4.4.1.

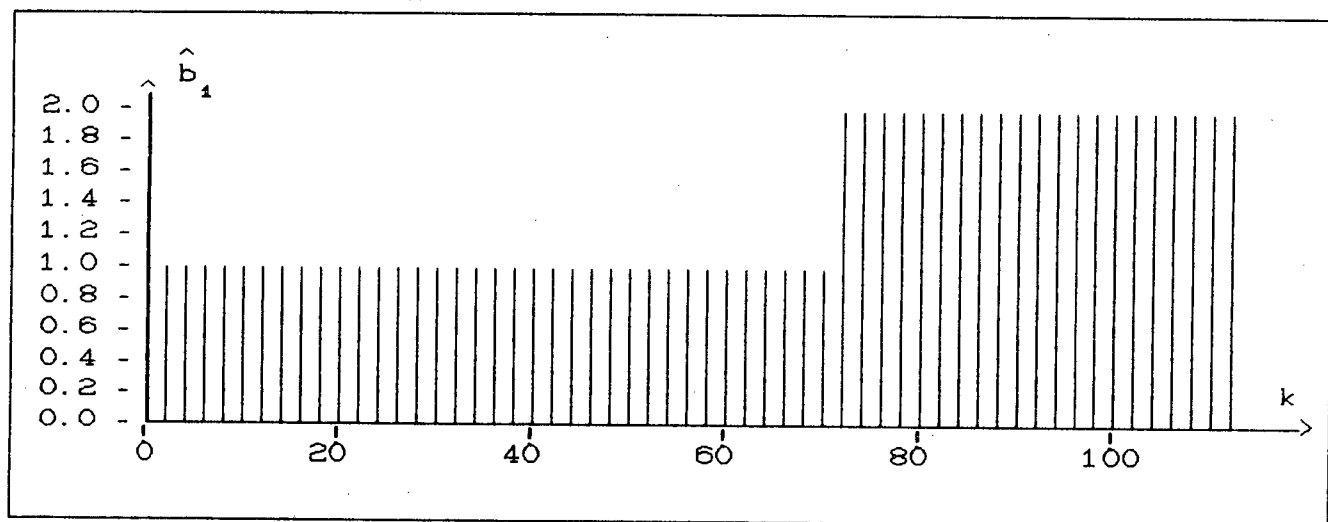


Fig. 4.3 - Parâmetro " $\hat{b}_1$ " identificado no caso 4.4.1

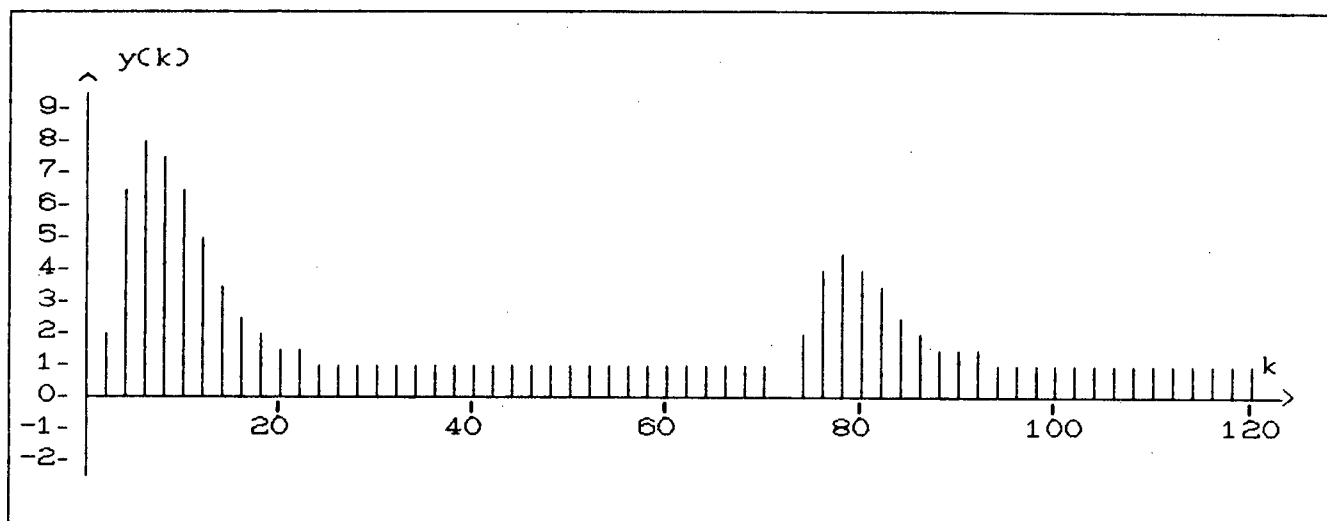


Fig. 4.4 - Gráfico da resposta ao degrau unitário do sistema adaptativo do caso 4.4.1.

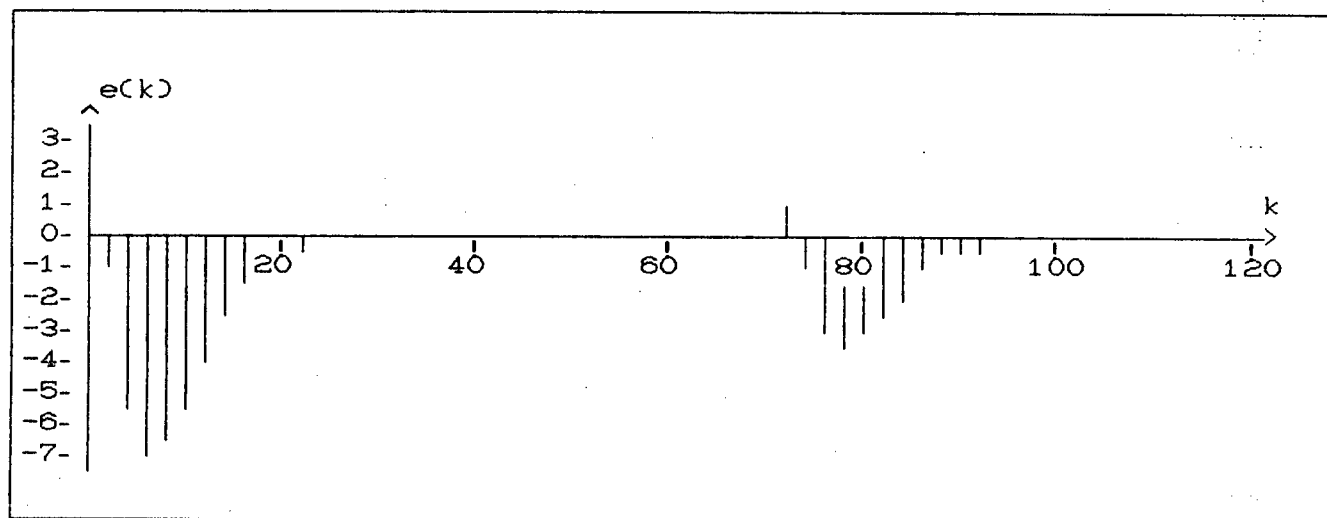


Fig. 4.5 - Gráfico do erro na resposta ao degrau unitário para o caso 4.4.1.

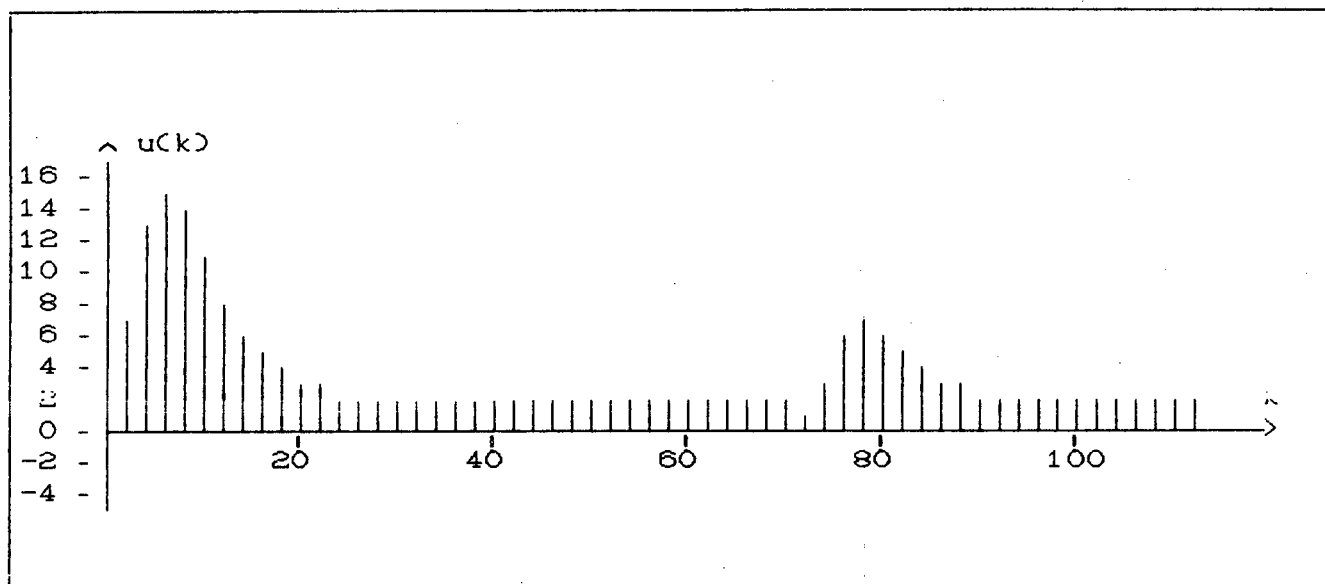


Fig. 4.6 - Gráfico do sinal  $u(k)$  aplicado ao processo do caso 4.4.1.

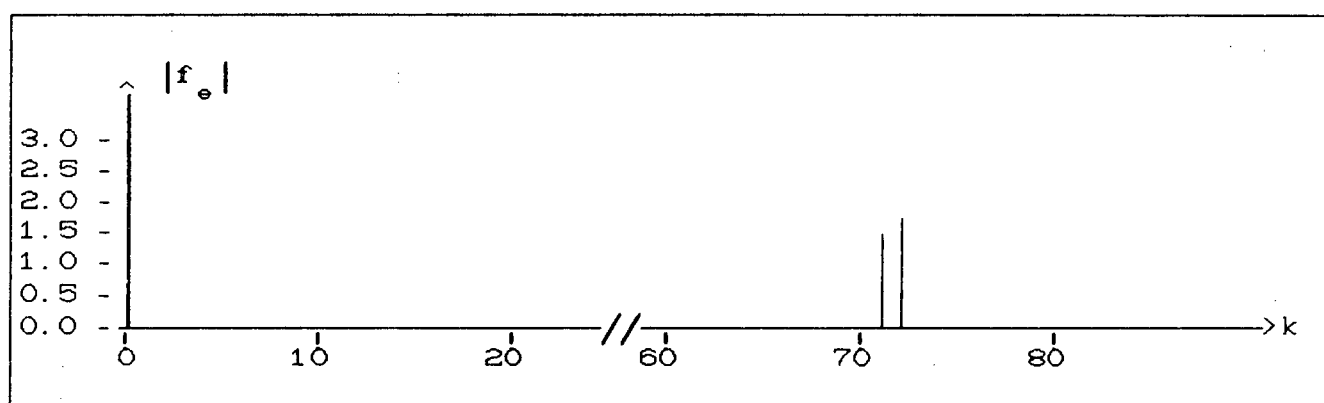


Fig.4.7 - Gráfico da norma do vetor  $f$  para o exemplo 4.4.1.

Obs.: A norma do vetor  $f$  é igual a zero em todos os instantes, exceto na iteração 71 e 72.

#### 4.4.2. INSTAVEL PARA ESTAVEL<sup>2</sup>

PRIMEIRA ORDEM

REFERENCIA TIPO DEGRAU

Processo antes da mudança:  $P(z) = \frac{1}{z+2}$

onde  $a_1 = 2$  e  $b_1 = 1$ .

Processo depois da mudança:  $P(z) = \frac{1}{z+0.9}$

onde  $a_1 = 0.9$  e  $b_1 = 1$ .

O processo muda na iteração número setenta, sem retenção dos últimos parâmetros identificados.

A equação característica desejada para a FTMF é:

$$ECD(z) = z^4 + 2.1 z^3 + 1.47 z^2 + 0.343 z$$

---

<sup>2</sup>Os gráficos são mostrados nas páginas 77, 78 e 79.

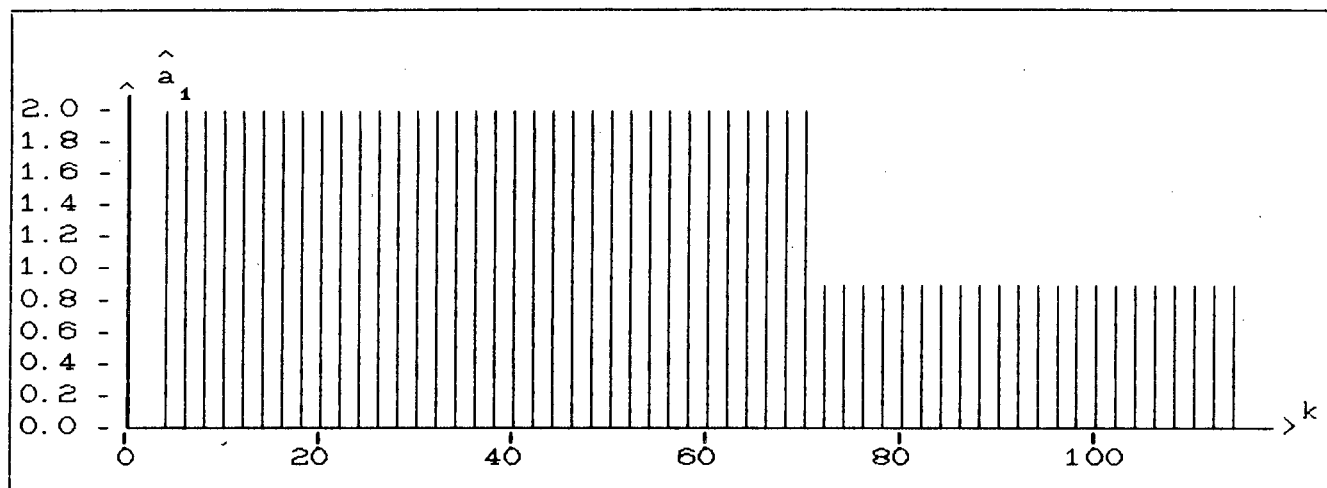


Fig. 4.8 - Gráfico do parâmetro " $\hat{a}_1$ " identificado no caso 4.4.2.

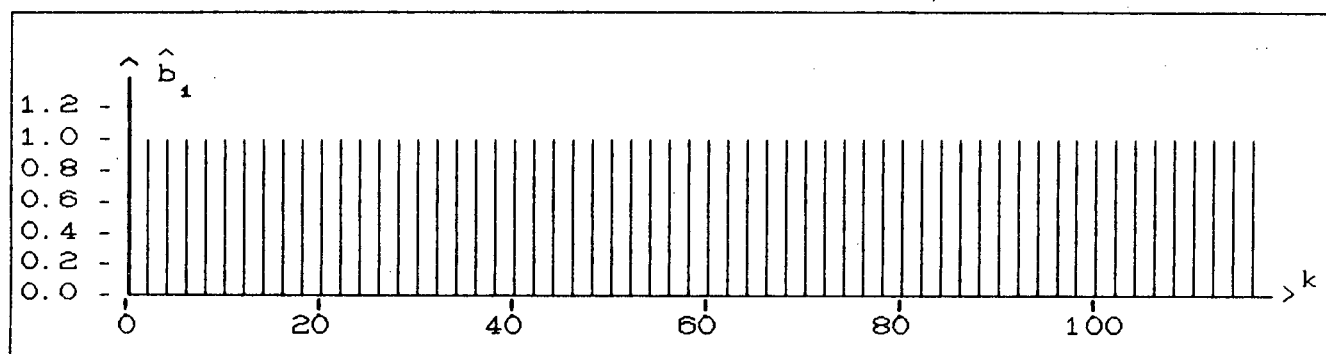


Fig. 4.9 - Gráfico do parâmetro " $\hat{b}_1$ " identificado no caso 4.4.2.

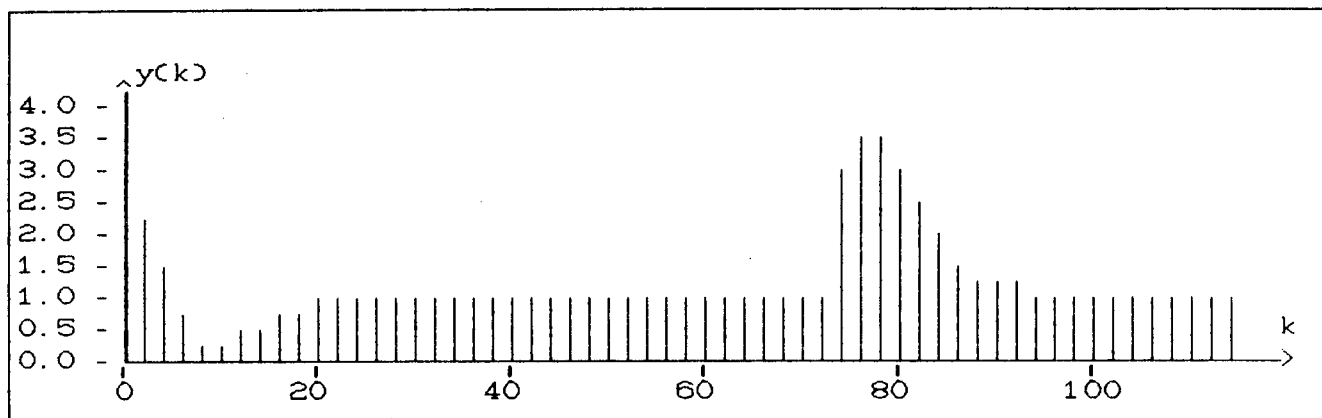


Fig. 4.10 - Gráfico da resposta ao degrau unitário do sistema do caso 4.4.2.

Obs.: A resposta deste sistema apresenta alguns valores negativos, os quais não estão aparecendo no gráfico. Para mais detalhes o leitor deve dirigir-se ao anexo 3.

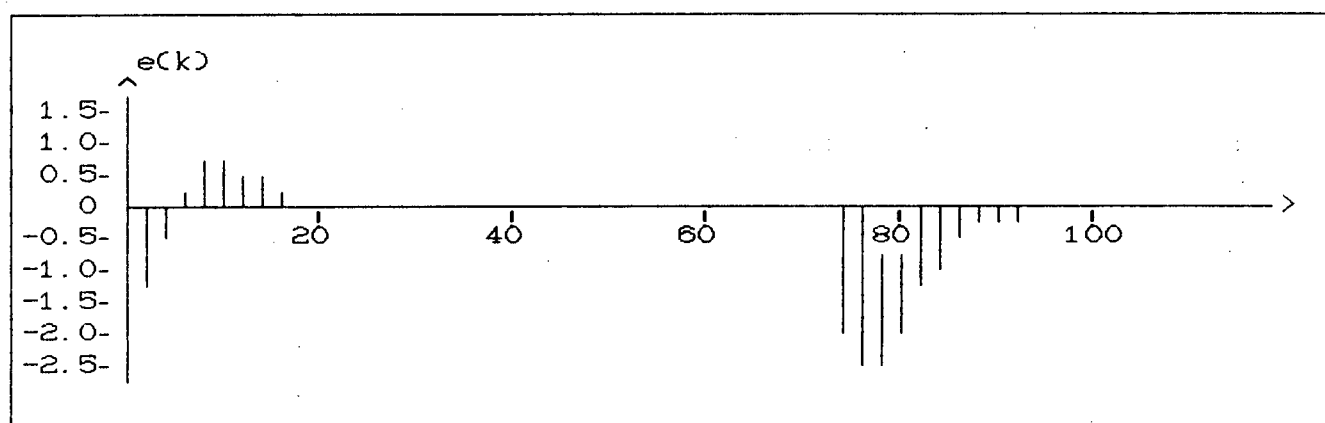


Fig. 4.11 - Gráfico do erro na resposta ao degrau unitário do sistema do caso 4.4.2.

Obs.: A resposta deste sistema apresenta alguns valores positivos, os quais não estão aparecendo no gráfico. Para mais detalhes o leitor deve dirigir-se ao anexo 3.

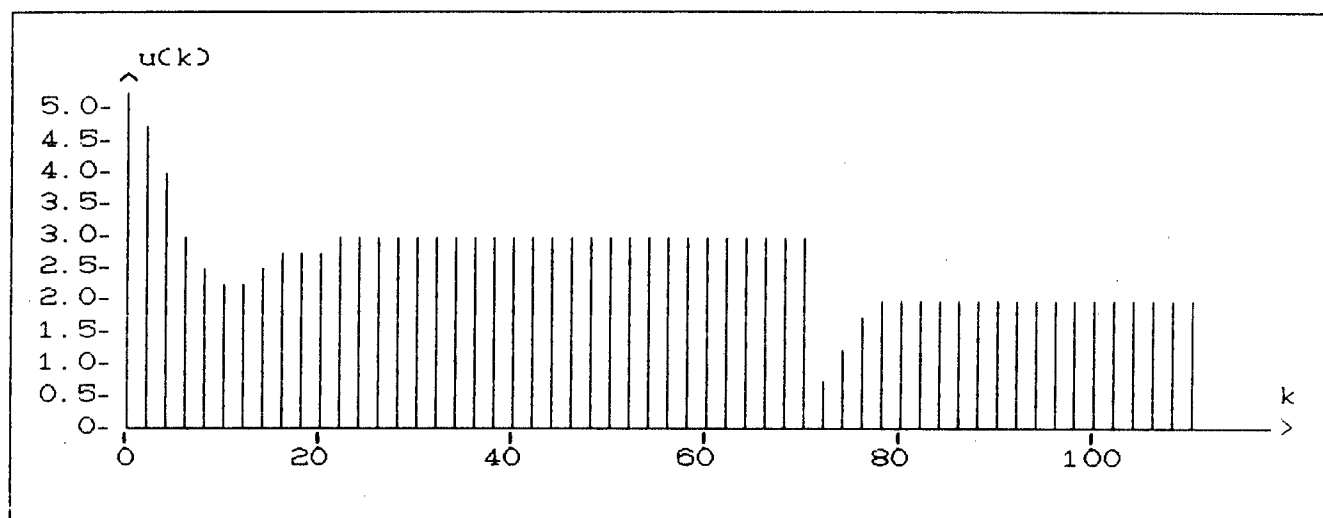


Fig. 4.11 - Gráfico do sinal de controle na resposta ao degrau unitário para o sistema do caso 4.4.2.

Para os parâmetros da equação característica vai-se desenhar um gráfico da norma do vetor  $f_e$  conforme descrito no exemplo 4.4.1.

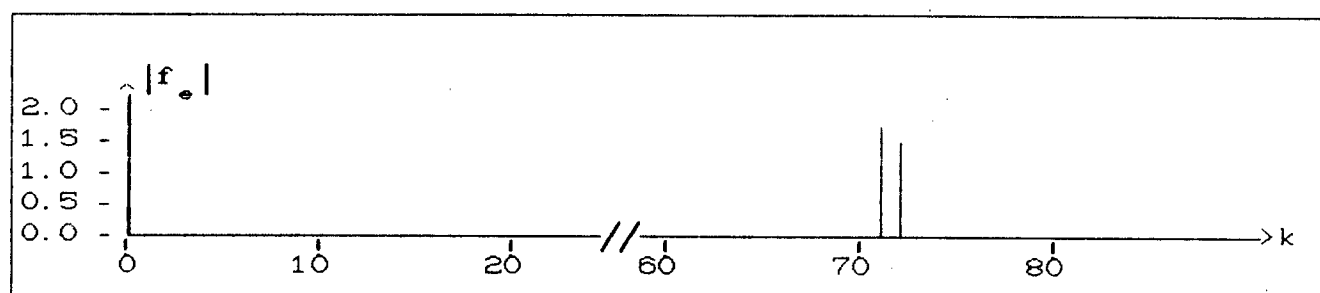


Fig. 4.12 - Gráfico da norma do vetor  $f_e$  do caso 4.4.2.

Obs.: O valor da norma é zero em todos os instantes, exceto nas iterações 71 e 72.

#### 4.4.3. PROCESSO INICIAL ESTAVEL<sup>a</sup>

##### PRIMEIRA ORDEM

$$\text{Referência: } \begin{cases} r(k) = 0.5 k & ; \quad k \leq 2 \\ r(k) = 1 & ; \quad k > 2 \end{cases}$$

$$\text{Processo inicial: } P(z) = \frac{1}{z + 0.9}$$

O processo tem sua primeira mudança na iteração número setenta e dois. A partir daí ocorre uma mudança a cada doze iterações. Cada mudança representa uma variação de cinco por cento (5%) em cada parâmetro do processo.

Assim, a sequência dos valores dos parâmetros é:

$$a_1 = 0.9 + 0.945 + 0.99225 + 1.0418625 + 1.093955625 + \dots$$

$$b_1 = 1 + 1.05 + 1.1025 + 1.157625 + 1.21550625 + \dots$$

A equação característica desejada para a FTMF é:

$$ECD(z) = z^4 + 1.2 z^3 + 0.48 z^2 + 0.064 z$$

---

<sup>a</sup> Os gráficos são mostrados nas páginas 81 e 82.



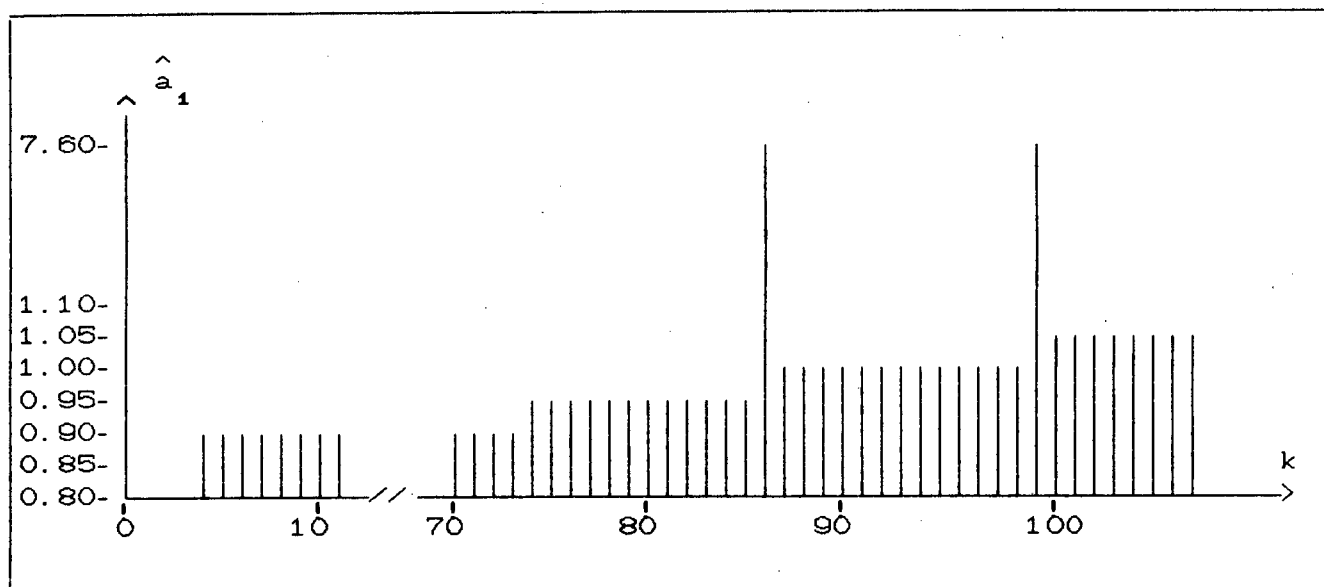


Fig. 4.13 - Parâmetro " $\hat{a}_1$ " identificado no processo do caso 4.4.3.

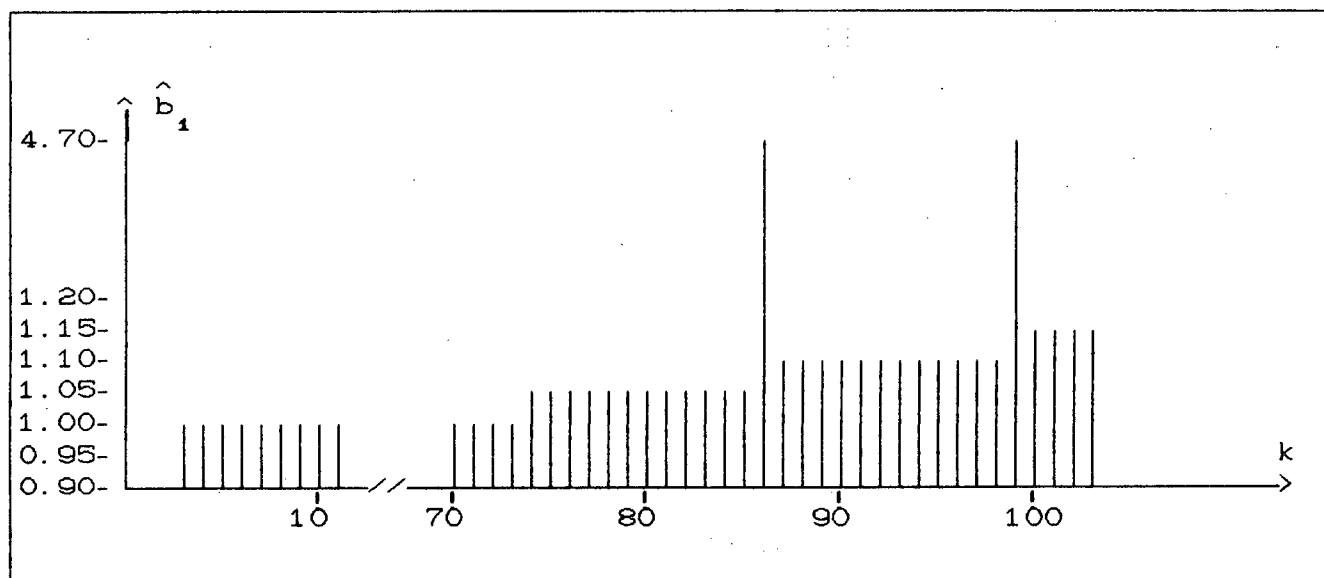


Fig. 4.13 - Parâmetro " $\hat{b}_1$ " identificado no processo do caso 4.4.3.

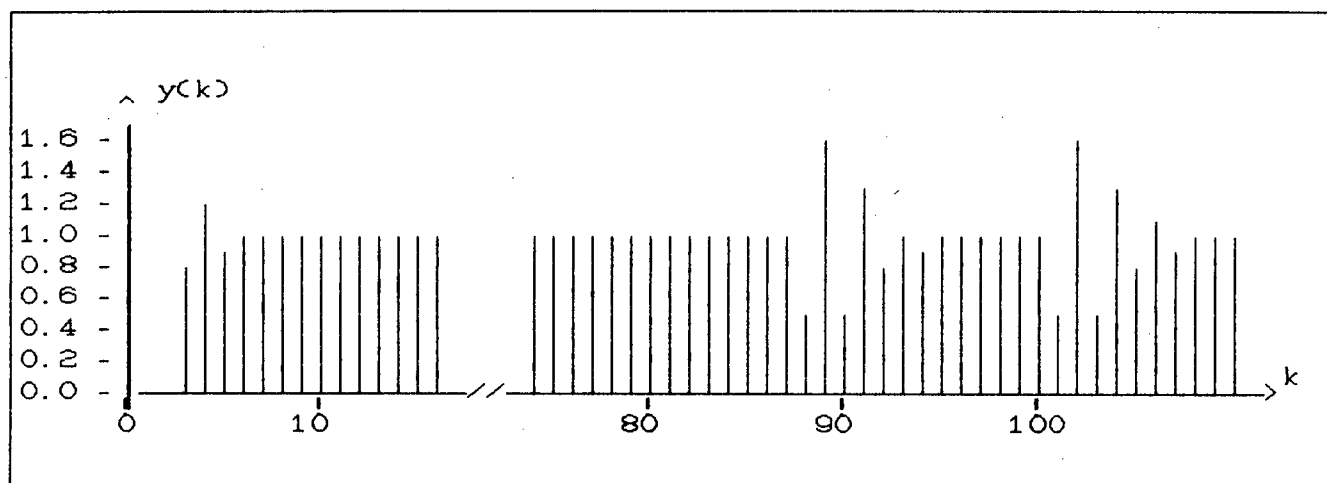


Fig. 4.14 - Resposta sem a retenção dos parâmetros para o caso 4.4.3.

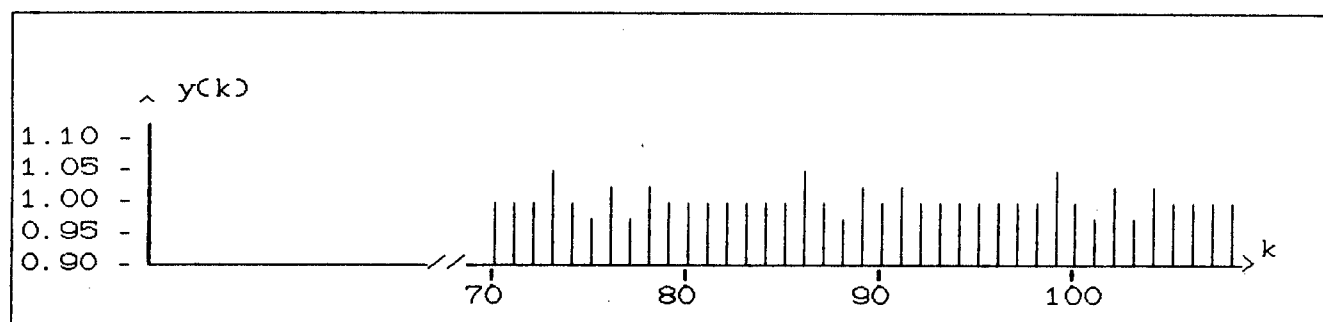


Fig. 4.15 - Resposta com a retenção dos últimos parâmetros identificados para o caso 4.4.3. Até a iteração 70 apresenta os mesmos resultados da fig. 4.14.

#### 4.4.4. PROCESSO INICIAL ESTAVEL<sup>4</sup>

##### SEGUNDA ORDEM

$$\text{Referência: } \begin{cases} r(k) = 0.3 k ; k \leq 3 \\ r(k) = 1 ; k > 3 \end{cases}$$

$$\text{Processo inicial: } P(z) = \frac{2z + 1}{z^2 + 1.8z + 0.81}$$

O processo tem sua primeira mudança na iteração setenta e oito. A partir daí ocorre uma mudança a cada dezoito iterações. Cada mudança representa uma variação de cinco por cento (5%) em cada parâmetro do processo.

Assim, a sequência dos valores dos parâmetros é:

$$a_1 = 1.8 \rightarrow 1.89 \rightarrow 1.9845 \rightarrow 2.083725 \rightarrow 2.18791125 \rightarrow \dots$$

$$a_2 = 0.81 \rightarrow 0.8505 \rightarrow 0.893025 \rightarrow 0.93767625 \rightarrow \dots$$

$$b_1 = 2 \rightarrow 2.1 \rightarrow 2.205 \rightarrow 2.31525 \rightarrow 2.4310125 \rightarrow \dots$$

$$b_2 = 1 \rightarrow 1.05 \rightarrow 1.1025 \rightarrow 1.157625 \rightarrow 1.21550625 \rightarrow \dots$$

A equação característica desejada para a FTMF é:

$$EDC(z) = z^6 + 2z^5 + 1.6z^4 + 0.64z^3 + 0.128z^2 + 0.01024z$$

---

<sup>4</sup>Os gráficos são mostrados na página 84.

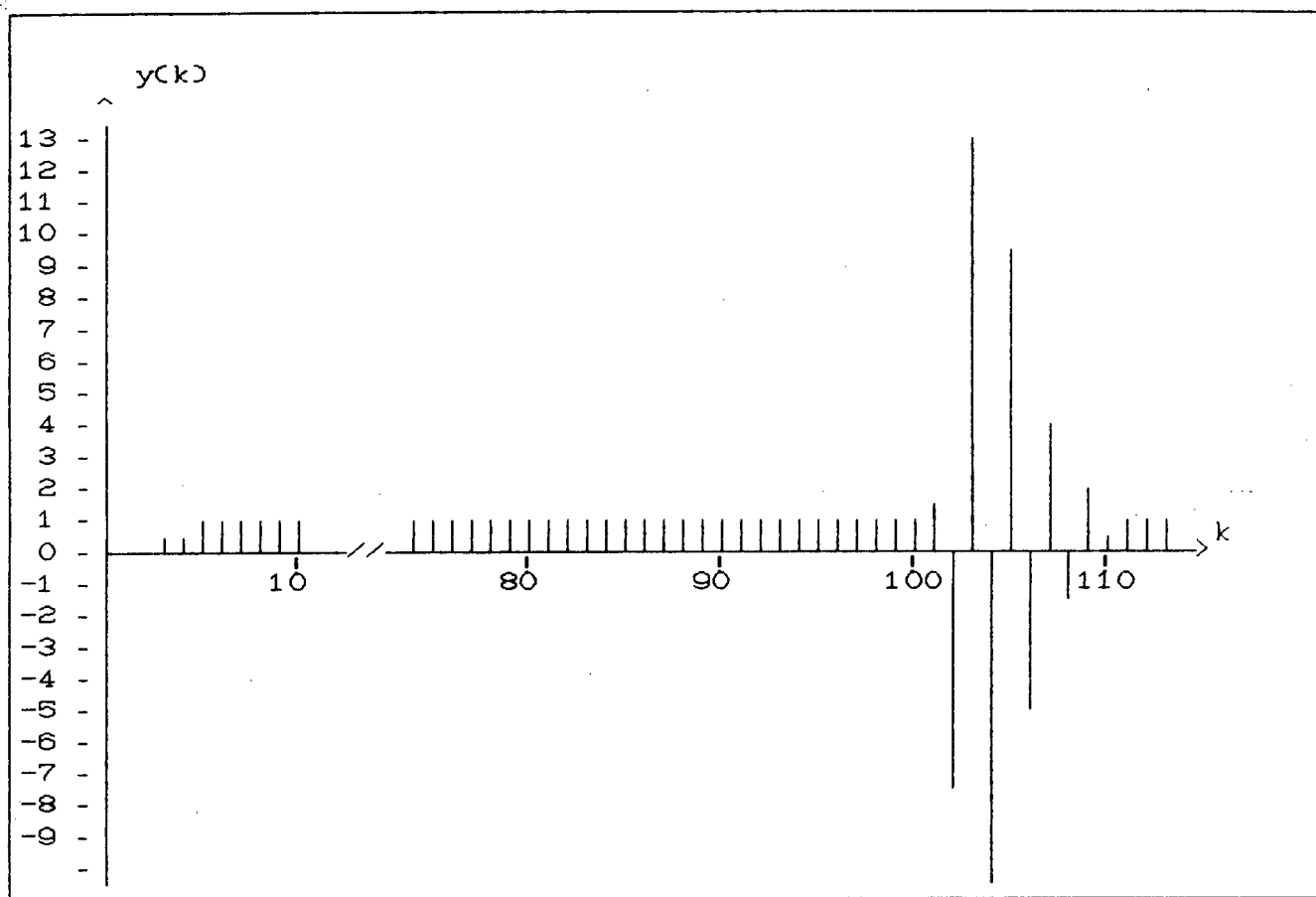


Fig. 4.16 - Resposta sem a retenção dos parâmetros para o caso 4.4.4.

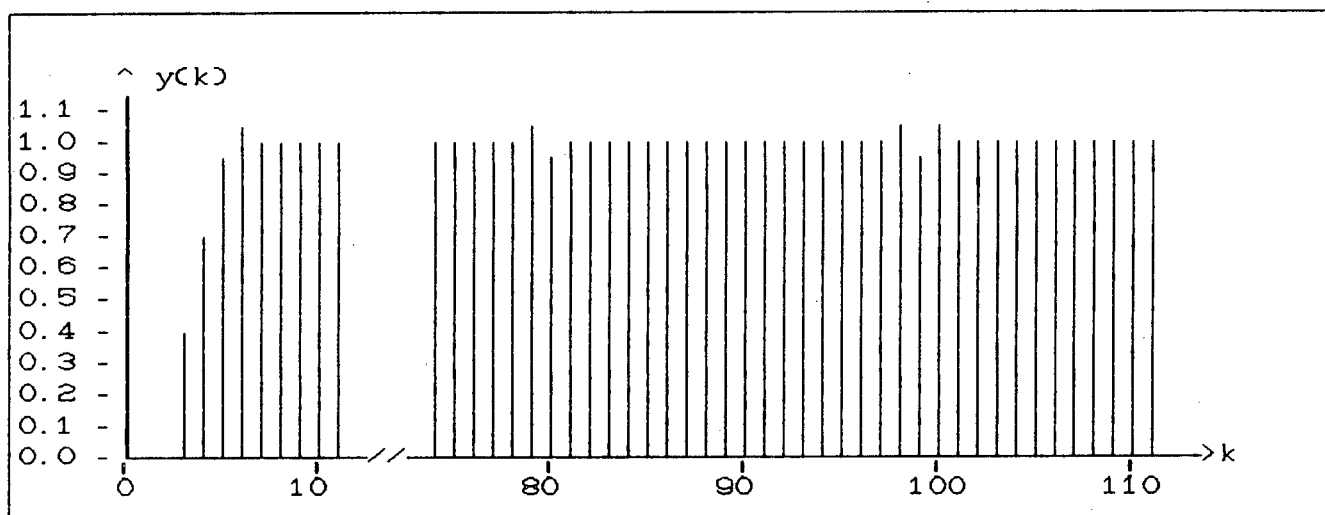


Fig. 4.17 - Resposta com a retenção dos parâmetros para o caso 4.4.4.

#### 4.5 - CONCLUSOES

O sistema adaptativo, de modo geral, comportou-se conforme o esperado. Cabe ressaltar que quando as mudanças dos parâmetros são de pequena amplitude, lentas, e discretas no tempo, o sistema que retém os últimos parâmetros identificados comporta-se melhor do que o que não retém os referidos parâmetros.

Para consultas adicionais e com melhor definição de valores, o leitor(a) pode dirigir-se ao anexo 3 onde estão as tabelas com os valores dos gráficos e outros valores que não aparecem no texto.

## CAPITULO 5 - CONCLUSAO

### 5.1 - CONCLUSOES

O principal objetivo deste trabalho foi propor um identificador rápido, que identificasse o processo em poucas iterações do sistema. Além disto, foi proposto um sistema adaptativo indireto, baseado em um controlador que necessita apenas dos coeficientes dos polinômios que representam o processo. A figura 5.1 mostra o esquema proposto para o sistema adaptativo.

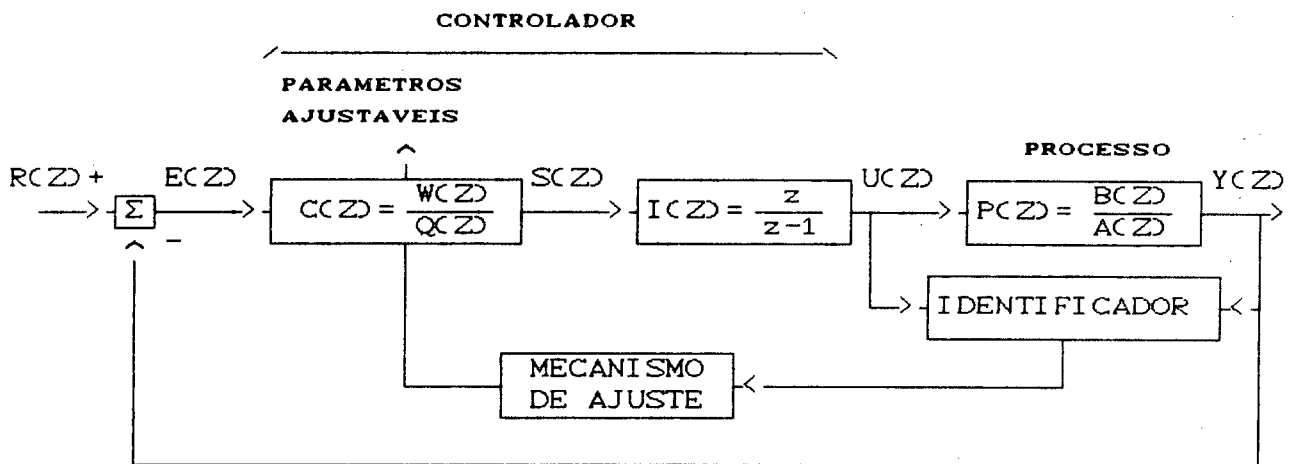


Fig. 5.1 - Diagrama de blocos do sistema adaptativo.

Os resultados alcançados pelas partes e pelo todo são os seguintes:

### CONTROLADOR :

Pode ser utilizado para controlar processos lineares de qualquer ordem, com variação discreta no tempo dos parâmetros do processo. Além disto, é conveniente que estas variações sejam de pequena amplitude, pois caso contrário podem ocorrer oscilações de elevada amplitude na resposta, durante a fase de adaptação.

Tem condições de colocar os pólos da função de transferência em malha fechada (FTMF), em qualquer lugar do plano complexo, sem precisar calcular os pólos e zeros do processo.

Tem um sobre-sinal elevado para entradas tipo degrau. Entretanto, pode-se entrar com uma rampa de baixa inclinação até que ela atinja a amplitude desejada para o degrau, deixando-a constante a partir deste nível. Este artifício contorna o problema do sobre-sinal, como pode ser visto nos últimos dois exemplos do capítulo 4.

### IDENTIFICADOR:

Tem um mecanismo matemático inédito para identificar os parâmetros do processo.

É rápido: precisa de apenas  $(2n)$  iterações do sistema para identificar o processo.

É recursivo, e portanto utiliza os últimos valores identificados para calcular os novos parâmetros do processo.

Tem boa estabilidade numérica, e por isso não apresenta problemas quando o sistema estabiliza, ou seja quando a entrada e a saída formam vetores linearmente dependentes, apesar de se usar o parâmetro  $g$  da ordem de  $10^9$ .

Identifica processos que devem ser lineares, completamente controláveis e observáveis, com variação dos parâmetros lenta e discreta no tempo. A ordem do processo deve ser conhecida. Além disso, o sistema deve ser não perturbado, determinística ou estocasticamente.

#### SISTEMA ADAPTATIVO:

Assim como todos os sistemas adaptativos de modo geral, ele tem boas características dentro das limitações impostas ao processo. Portanto, para processos lineares, com variação dos parâmetros lenta e discreta no tempo, ele comportou-se a contento. Além disto, existe a limitação da entrada, que deve ser iniciada com uma rampa até atingir o nível desejado para o degrau, para depois então ficar constante. Isto é necessário para contornar o problema do sobre-sinal inicial.

#### 5.2 - SUGESTOES PARA FUTUROS TRABALHOS

Para futuros trabalhos deixa-se as seguintes sugestões:

1. Fazer um estudo mais detalhado sobre a localização dos pólos da função de transferência em malha fechada, de forma a tentar reduzir o sobre-sinal inicial na resposta do sistema;



2. Fazer uma análise quantitativa da robustez do sistema, tendo em vista obter um melhor conhecimento a respeito da estabilidade do sistema durante a re-identificação do processo, considerando que o identificador esteja trabalhando com o mecanismo de retenção dos últimos parâmetros identificados;

3. Aplicar o identificador em processos perturbados;

4. Aplicar o identificador em processos com alguns parâmetros iguais a zero;

5. Aplicar o identificador em controle adaptativo direto.

## A N E X O 1

TEOREMA DO VALOR FINAL: Seja  $X(z)$  a transformada  $z$  de  $x(t)$ . Se  $X(z)$  não tem polos duplos ou de ordem mais alta na circunferência unitária centrada na origem do plano  $z$  e nenhum polo fora do círculo unitário (esta é a condição de estabilidade de  $X(z)$ ) então o valor final de  $x(t)$  ou  $x(k)$  é dado por

$$\lim_{k \rightarrow \infty} x(k) = \lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = \lim_{z \rightarrow 1} [(z-1) X(z)]$$

Prova:

$$Z\{x(k)\} = X(z) = \sum_{k=0}^{\infty} x(k) z^{-k} \quad (A1-1)$$

$$Z\{x(k+1)\} = zX(z) - zx(0) = \sum_{k=0}^{\infty} x(k+1) z^{-k} \quad (A1-2)$$

Subtraindo a equação (A1-1) da equação (A1-2) tem-se

$$\begin{aligned} Z\{x(k+1)\} - Z\{x(k)\} &= \\ &= zX(z) - zx(0) - X(z) = \sum_{k=0}^{\infty} x(k+1) z^{-k} - \sum_{k=0}^{\infty} x(k) z^{-k} \\ (z-1)X(z) &= zx(0) + \sum_{k=0}^{\infty} [x(k+1) - x(k)] z^{-k} \quad (A1-3) \end{aligned}$$

Considerando que  $X(z)$  é estável e aplicando o limite para  $z$  tendendo a um na equação (A1-3) tem-se

$$\lim_{z \rightarrow 1} (z-1)X(z) = x(0) + x(\infty) - x(0) = x(\infty)$$

$$\text{OBS.: } Z\{x(k+1)\} = zX(z) - zx(0)$$

$$\text{prova: } Z\{x(k+1)\} = \sum_{k=0}^{\infty} x(k+1)z^{-k}$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} x(k)z^{-k+1}$$

$$= z \left( \sum_{k=0}^{\infty} x(k)z^{-k} - x(0) \right)$$

$$= zX(z) - zx(0)$$

TEOREMA 1: Dada a equação matricial  $Ax = y$ , onde o operador linear  $A$ , de dimensão  $(m \times n)$ , mapeia  $(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$  em  $(\mathbb{R}^m, \mathbb{R})$ , tem-se:

1. Conhecidos o vetor  $y$  em  $(\mathbb{R}^m, \mathbb{R})$  e a matriz  $A$  de dimensão  $(m \times n)$ , existe um vetor  $x$  em  $(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$  tal que  $Ax = y$  se e somente se  $\rho(A) = \rho([A|y])$ .

2. Dada a matriz  $A$ , então para todo o vetor  $y$  em  $(\mathbb{R}^m, \mathbb{R})$  existe um vetor  $x$  em  $(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$  tal que  $Ax = y$  se e somente se  $\rho(A) = m$ .

Prova:

1. O rank da matriz  $A$ ,  $\rho(A)$ , é dado pelo número máximo de

linhas linearmente independentes (LI), que por sua vez igual ao número máximo de colunas LI.

Seja a matriz  $A$  escrita da seguinte forma:  
 $A = [a_1 | a_2 | \dots | a_n]$ , onde os vetores  $a_i$  ( $i=1, \dots, n$ ) são as colunas da matriz  $A$ . Então a equação matricial  $Ax = y$  pode ser escrita da seguinte maneira:

$$a_1 x_1 + a_2 x_2 + \dots + a_n x_n = y \quad (A1-2)$$

Observando a equação (A1-2) percebe-se que para que a igualdade se verifique, o vetor  $y$  tem que ser escrito como uma combinação linear das colunas da matriz  $A$ . Se  $y$  é escrito como uma combinação linear destas colunas (vetores) é porque ele é linearmente dependente destas colunas (vetores). Assim as matrizes  $A$  e  $[A|y]$  tem o mesmo número de colunas LI, portanto  $\rho(A) = \rho([A|y])$ .

Se o vetor  $y$  não pode ser escrito como uma combinação linear dos vetores  $a_i$  ( $i=1, \dots, n$ ) então o posto da matriz  $A$  é diferente do posto da matriz  $[A|y]$  e não existe um vetor  $x$  em  $(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$  tal que a equação (A1-2) seja satisfeita.

2. Se o posto da matriz  $A$  é igual a  $m$ , então a matriz  $A$  tem  $m$  colunas linearmente independentes. Este conjunto de colunas (vetores) LI pode formar uma base para representar qualquer vetor em  $(\mathbb{R}^m, \mathbb{R})$ . Assim, qualquer vetor  $y$  em  $(\mathbb{R}^m, \mathbb{R})$  pode

ser representado por uma combinação linear das colunas da matriz A, e portanto sempre existe solução para a equação matricial  $Ax=y$ .

$$\text{LEMA 1: } (G^{-1} + A^T A)^{-1} = G - GA^T (I + AGA^T)^{-1} AG$$

Prova:

$$\begin{aligned} & [G - GA^T (I + AGA^T)^{-1} AG] [G^{-1} + A^T A] = \\ & = GG^{-1} - GA^T (I + AGA^T)^{-1} AGG^{-1} + GA^T A - GA^T (I + AGA^T)^{-1} AGA^T A = \\ & = I - GA^T [(I + AGA^T)^{-1} A - A + (I + AGA^T)^{-1} AGA^T A] = \\ & = I - GA^T [(I + AGA^T)^{-1} A - (I + AGA^T)^{-1} (I + AGA^T) A + (I + AGA^T)^{-1} AGA^T A] = \\ & = I - GA^T (I + AGA^T)^{-1} [A - (I + AGA^T) A + AGA^T A] = \\ & = I - GA^T (I + AGA^T)^{-1} (A - A - AGA^T A + AGA^T A) = I \end{aligned}$$

$$\text{LEMA 2: } I - (I + AGA^T)^{-1} AGA^T = (I + AGA^T)^{-1}$$

Prova:

$$\begin{aligned} & [I - (I + AGA^T)^{-1} AGA^T] (I + AGA^T) = \\ & I - (I + AGA^T)^{-1} AGA^T + AGA^T - (I + AGA^T)^{-1} AGA^T AGA^T = \\ & I - (I + AGA^T)^{-1} [AGA^T - (I + AGA^T) AGA^T + AGA^T AGA^T] = \end{aligned}$$

$$I - (I + AGA^T)^{-1} [AGA^T - AGA^T - AGA^T AGA^T + AGA^T AGA^T] = I$$

LEMA 3:

Seja:

$$W = \begin{bmatrix} w_1 & & 0 \\ & w_2 & \\ 0 & & \ddots \\ & & & w_m \end{bmatrix}$$

$$D = [d_1 | d_2 | \dots | d_m]$$

Então

$$DWD^T = w_1 d_1 d_1^T + w_2 d_2 d_2^T + \dots + w_m d_m d_m^T$$

Prova:

$$DW = [w_1 d_1 | w_2 d_2 | \dots | w_m d_m]$$

$$DWD^T = [w_1 d_1 | w_2 d_2 | \dots | w_m d_m] \begin{bmatrix} d_1^T \\ d_2^T \\ \vdots \\ d_m^T \end{bmatrix} =$$

$$= DW \left\{ \begin{bmatrix} d_1^T \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ d_2^T \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} + \dots + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ d_m^T \end{bmatrix} \right\}$$

$$= DW \begin{bmatrix} d_1^T \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} + DW \begin{bmatrix} 0 \\ d_2^T \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} + \dots + DW \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ d_m^T \end{bmatrix} =$$

$$= w_1 d_1 d_1^T + w_2 d_2 d_2^T + \dots + w_m d_m d_m^T$$

LEMA 4:

Seja o sistema:

$$(I + AGA^T) x = y \quad (A1-3)$$

A solução da equação (A1-3) é dada por :

$$x = DWD^T y$$

onde

$\{e_1, e_2, \dots, e_m\}$  são LI

$$D = [d_1 | d_2 | \dots | d_m]$$

$$W = \begin{bmatrix} \frac{1}{d_1^T(I+AGA^T)d_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \frac{1}{d_m^T(I+AGA^T)d_m} \end{bmatrix}$$

$$d_1 = e_1$$

$$d_{l+1} = e_{l+1} - \sum_{i=1}^l \frac{e_{l+1}^T (I+AGA^T) d_i}{d_i^T (I+AGA^T) d_i} d_i$$

Prova:

Os vetores  $d_1, d_2, \dots, d_m$  são  $(I+AGA^T)$  ortogonais.

A solução  $x$  pode ser escrita:

$$x = \beta_1 d_1 + \beta_2 d_2 + \dots + \beta_m d_m$$

Os coeficientes  $\beta_i$  ( $i = 1, \dots, m$ ) são:

$$d_i^T(I+AGA^T)x = \beta_1 d_i^T(I+AGA^T)d_1 + \dots + \beta_i d_i^T(I+AGA^T)d_i + \dots + \beta_m d_i^T(I+AGA^T)d_m$$

$$d_i^T(I + AGA^T)x = \beta_i d_i^T(I + AGA^T)d_i$$

$$\beta_i = \frac{d_i^T(I+AGA^T)x}{d_i^T(I+AGA^T)d_i} = \frac{d_i^T y}{d_i^T(I+AGA^T)d_i}$$



Assim a solução é:

$$x = \left[ \frac{d_1 d_1^T}{d_1^T (I + GA^T) d_1} + \frac{d_2 d_2^T}{d_2^T (I + GA^T) d_2} + \dots + \frac{d_m d_m^T}{d_m^T (I + GA^T) d_m} \right] y$$

Pelo lema 3:

$$x = DWD^T y$$

$$\text{LEMA 5: } (G^{-1} + A^T A)^{-1} = G - GA^T A (I + GA^T A)^{-1} G$$

Prova:

$$(G - GA^T A (I + GA^T A)^{-1} G)(G^{-1} + A^T A) = I$$

$$I + GA^T A - GA^T A (I + GA^T A)^{-1} - GA^T A (I + GA^T A)^{-1} GA^T A = I$$

$$GA^T A [I - (I + GA^T A)^{-1} - (I + GA^T A)^{-1} GA^T A] = 0$$

Pré-multiplicando ambos os lados por  $(I + GA^T A)$  tem-se

$$(I + GA^T A)[I - (I + GA^T A)^{-1} - (I + GA^T A)^{-1} GA^T A] = 0$$

$$(I + GA^T A) - I - GA^T A = 0$$

$$0 = 0$$

REM

## A N E X O 2

REM Este anexo apresenta o programa utilizado para simular os  
REM exemplos que aparecem nos capitulos. Esta versao nao  
REM utiliza o artifício de reter os ultimos parametros  
REM identificados.

REM \*\* INICIO DO PROGRAMA PRINCIPAL \*\*

DEFDBL A-Z

Z = -1

A1 = 1000000!

INPUT "ORDEM DO DENOMINADOR ="; N2

CLS

N1 = 2 \* N2

N3 = 2 \* (N2 + 1)

N = N3: DIM EC(N3)

DIM F(7, N3, N3), D(N3, N3), P(N3, N3), I(N3), X(N3, 7)

FOR A = 1 TO N

PRINT "ECD F("; A; ")="; : INPUT EC(A)

NEXT A

100 GOSUB 9600

GOSUB 9300

GOTO 100

REM \*\* FIM DO PROGRAMA PRINCIPAL \*\*

REM \*\* INICIO SUB-ROT. PRT \*\*

110 FOR A = 1 TO N

PRINT "X"; A; "="; USING "#####.#####"; X(A, 2)

NEXT A

PRINT "-----"

RETURN

REM \*\* FIM SUB-ROT PRT \*\*

8199 REM \*\* INICIO SUB-ROT. SOLUCAO \*\*

8200 FOR A = 1 TO N

FOR B = 1 TO N

F(1, A, B) = 0: F(2, A, B) = 0: F(4, A, B) = 0

F(5, A, B) = 0: D(A, B) = 0: P(A, B) = 0

NEXT B

X(A, 3) = 0: X(A, 4) = 0: I(A) = 0

NEXT A

FOR A = 1 TO N

FOR B = 1 TO N

F(2, A, B) = 0

IF A = B THEN LET F(2, A, B) = A1

NEXT B

NEXT A

FOR A = 1 TO N

FOR B = 1 TO N

FOR C = 1 TO N

F(4, A, B) = F(4, A, B) + F(3, A, C) \* F(2, C, B)

NEXT C

NEXT B

NEXT A

REM CONTINUA NA PROXIMA PAGINA

```

FOR A = 1 TO N
  FOR B = 1 TO N
    FOR C = 1 TO N
      F(1, A, B) = F(1, A, B) + F(4, A, C) * F(3, B, C)
    NEXT C
  NEXT B
NEXT A
FOR A = 1 TO N
  F(1, A, A) = F(1, A, A) + 1
NEXT A
GOSUB 7700
FOR A = 1 TO N
  F(5, A, A) = 1 / I(A)
NEXT A
FOR A = 1 TO N
  FOR B = 1 TO N
    F(1, A, B) = 0: F(4, A, B) = 0
  NEXT B
NEXT A
FOR A = 1 TO N
  FOR B = 1 TO N
    FOR C = 1 TO N
      F(1, A, B) = F(1, A, B) + F(2, A, C) * F(3, B, C)
    NEXT C
  NEXT B
NEXT A
FOR A = 1 TO N
  FOR B = 1 TO N
    FOR C = 1 TO N
      F(4, A, B) = F(4, A, B) + F(1, A, C) * D(C, B)
    NEXT C
  NEXT B
NEXT A
FOR A = 1 TO N
  FOR B = 1 TO N
    F(1, A, B) = 0
  NEXT B
NEXT A
FOR A = 1 TO N
  FOR B = 1 TO N
    FOR C = 1 TO N
      F(1, A, B) = F(1, A, B) + F(4, A, C) * F(5, C, B)
    NEXT C
  NEXT B
NEXT A
FOR A = 1 TO N
  FOR B = 1 TO N
    F(4, A, B) = 0
  NEXT B
NEXT A
REM   CONTINUA NA PROXIMA PAGINA

```

```

FOR A = 1 TO N
  FOR B = 1 TO N
    FOR C = 1 TO N
      F(4, A, B) = F(4, A, B) + F(1, A, C) * D(B, C)
    NEXT C
  NEXT B
NEXT A
FOR A = 1 TO N
  X(A, 3) = 0
NEXT A
FOR A = 1 TO N
  FOR B = 1 TO N
    X(A, 3) = X(A, 3) + F(3, A, B) * X(B, 2)
  NEXT B
NEXT A
FOR A = 1 TO N
  X(A, 3) = X(A, 1) - X(A, 3)
NEXT A
FOR A = 1 TO N
  X(A, 4) = 0
NEXT A
FOR A = 1 TO N
  FOR B = 1 TO N
    X(A, 4) = X(A, 4) + F(4, A, B) * X(B, 3)
  NEXT B
NEXT A
FOR A = 1 TO N
  X(A, 2) = X(A, 2) + X(A, 4)
NEXT A
RETURN
REM ** FIM SUB-ROT. SOLUCAO **
7699 REM ** INICIO SUB-ROT. Q-VETORES **
7700 FOR A = 1 TO N
  FOR B = 1 TO N
    P(A, B) = 0
    IF A = B THEN LET P(A, B) = 1
  NEXT B
NEXT A
J = 0
FOR A = 1 TO N
  LET D(A, 1) = P(A, 1)
NEXT A
FOR K = 1 TO N
  FOR B = 1 TO N
    FOR C = 1 TO N
      I(K) = I(K) + D(B, K) * F(1, C, B) * D(C, K)
    NEXT C
  NEXT B
  IF K = N THEN RETURN
REM CONTINUA NA PROXIMA PAGINA

```

```

FOR A = 1 TO K
  FOR B = 1 TO N
    FOR C = 1 TO N
      J = J + P(C, K + 1) * F(1, C, B) * D(B, A)
    NEXT C
  NEXT B
  FOR B = 1 TO N
    D(B, K + 1) = D(B, K + 1) + J / I(A) * D(B, A)
  NEXT B
  J = 0
NEXT A
FOR A = 1 TO N
  D(A, K + 1) = P(A, K + 1) - D(A, K + 1)
NEXT A
NEXT K
STOP
REM ** FIM SUB-ROT. Q-VETORES **
REM ** INICIO SUB-ROT. CALCULA **
9300 N = N3
FOR A = 1 TO N3
  FOR B = 1 TO N3
    F(3, A, B) = 0
  NEXT B
NEXT A
FOR A = 2 TO (N2 + 1)
  F(3, A + 1, 1) = X(A, 2) - X(A - 1, 2)
NEXT A
F(3, 1, 1) = 1
F(3, 2, 1) = X(1, 2) - 1
F(3, N2 + 2, 1) = -X(N2, 2)
FOR A = 2 TO (N2 + 1)
  FOR B = A TO (A + N2 + 1)
    F(3, B, A) = F(3, B - A + 1, 1)
  NEXT B
NEXT A
FOR A = (N2 + 2) TO N3
  FOR B = (A - N2) TO (A - 1)
    F(3, B, A) = X(2 * N2 + B - A + 1, 2)
  NEXT B
NEXT A
FOR A = 2 TO N2
  X(A, 1) = EC(A) - X(A, 2) + X(A - 1, 2)
NEXT A
X(1, 1) = EC(1) - X(1, 2) + 1
X(N2 + 1, 1) = EC(N2 + 1) + X(N2, 2)
FOR A = (N2 + 2) TO N3
  X(A, 1) = EC(A)
NEXT A
GOSUB 8200
FOR A = 1 TO N3
  PRINT "X("; A; "; 2 )="; USING "###.####"; X(A, 2)
NEXT A
RETURN
STOP
REM  CONTINUA NA PROXIMA FOLHA

```

```

9600  REM ** INICIO SUB-ROT. IDENTIFICA **
      N = N1
      GOSUB 9850
      X(N, 5) = A3
      F(6, N, N2 + 1) = AX
      AX = A2
      FOR A = 1 TO N
        FOR B = 1 TO N
          F(3, A, B) = F(6, A, B)
        NEXT B
        X(A, 1) = X(A, 5): X(A, 2) = X(A, 7)
      NEXT A
      GOSUB 8200
      FOR A = 2 TO N
        X(A - 1, 5) = X(A, 5)
      NEXT A
      FOR A = 1 TO N
        FOR B = 2 TO N
          F(6, B - 1, A) = F(6, B, A)
        NEXT B
        X(A, 7) = X(A, 2)
      NEXT A
      FOR A = N TO 2 STEP -1
        F(6, N, A) = F(6, N, A - 1)
      NEXT A
      F(6, N, 1) = X(N, 5)
      FOR A = 1 TO N2
        X(A, 2) = -X(A, 2)
      NEXT A
      GOSUB 110
      RETURN
      REM ** FIM SUB-ROT IDENTIFICA **
9850  REM ** INICIO SUB-ROT. LEITURA **
      RO = 1
      A01 = 1.8: A02 = .81: A03 = 0: A04 = 0
      B01 = 2: B02 = 1: B03 = 0: B04 = 0
      IF Z >= 80 THEN
        A01 = 1.7: A02 = .8: A03 = 0: A04 = 0
        B01 = 1.8: B02 = 1: B03 = 0: B04 = 0
      END IF
      SELECT CASE N2
        CASE 1
          IF Z < N3 THEN
            X(1, 2) = -2
            X(2, 2) = 0
            X(3, 2) = 2.17
            X(4, 2) = -2.143
          END IF
          YO = -A01 * Y1 + B01 * U1
          EO = RO - YO
          SO = -X(1, 2) * S1 - X(2, 2) * S2 + X(3, 2) * E1
          SO = SO + X(4, 2) * E2: UO = U1 + SO
          REM      CONTINUA NA PROXIMA PAGINA

```

```

F4 = -A01 * X(2, 2)
F3 = A01 * X(2, 2) - A01 * X(1, 2) - X(2, 2) + X(4, 2) * B01
F2 = X(2, 2) - X(1, 2) + A01 * X(1, 2) - A01 + X(3, 2) * B01
F1 = X(1, 2) + A01 - 1
PRINT
PRINT "F4="; USING "###.###"; F4
PRINT "F3="; USING "###.###"; F3
PRINT "F2="; USING "###.###"; F2
PRINT "F1="; USING "###.###"; F1
PRINT
CASE 2
  IF Z < N3 THEN
    X(1, 2) = 2.7
    X(2, 2) = 1.09866667#
    X(3, 2) = 0
    X(4, 2) = 1.31566667#
    X(5, 2) = 2.3592
    X(6, 2) = 1.05799
  END IF
  Y0 = -A01 * Y1 - A02 * Y2 + B01 * U1 + B02 * U2
  E0 = R0 - Y0
  S0 = -X(1, 2) * S1 - X(2, 2) * S2 - X(3, 2) * S3 + X(4, 2) * E1
  S0 = S0 + X(5, 2) * E2 + X(6, 2) * E3
  U0 = U1 + S0
  F6 = -A02 * X(3, 2)
  F5 = -A01 * X(3, 2) + A02 * X(3, 2) - A02 * X(2, 2)
  F5 = F5 + X(6, 2) * B02
  F4 = -X(3, 2) + A01 * X(3, 2) - A01 * X(2, 2) + A02 * X(2, 2)
  F4 = F4 - A02 * X(1, 2) + X(6, 2) * B01 + X(5, 2) * B02
  F3 = X(3, 2) - X(2, 2) + A01 * X(2, 2) - A01 * X(1, 2)
  F3 = F3 + A02 * X(1, 2) - A02 + X(5, 2) * B01 + X(4, 2) * B02
  F2 = X(2, 2) - X(1, 2) + A01 * X(1, 2) - A01 + A02
  F2 = F2 + X(4, 2) * B01
  F1 = X(1, 2) + A01 - 1
  PRINT
  PRINT "F6="; USING "###.###"; F6
  PRINT "F5="; USING "###.###"; F5
  PRINT "F4="; USING "###.###"; F4
  PRINT "F3="; USING "###.###"; F3
  PRINT "F2="; USING "###.###"; F2
  PRINT "F1="; USING "###.###"; F1
  PRINT
CASE 3
  IF Z < N3 THEN
    FOR A = 1 TO N3
      X(A, 2) = 1
    NEXT A
  END IF
  REM CONTINUA NA PROXIMA PAGINA

```

```

Y0 = -A01 * Y1 - A02 * Y2 - A03 * Y3 + B01 * U1 + B02 * U2
Y0 = Y0 + B03 * U3
E0 = R0 - Y0
S0 = -X(1, 2) * S1 - X(2, 2) * S2 - X(3, 2) * S3 - X(4, 2) * S4
S0 = S0 + X(5, 2) * E1 + X(6, 2) * E2 + X(7, 2) * E3
S0 = S0 + X(8, 2) * E4
U0 = U1 + S0
F8 = -A03 * X(4, 2)
F7 = -A02 * X(4, 2) + A03 * X(4, 2) - A03 * X(3, 2)
F7 = F7 + X(8, 2) * B03
F6 = -A01 * X(4, 2) + A02 * X(4, 2) - A02 * X(3, 2)
F6 = F6 + A03 * X(3, 2) - A03 * X(2, 2) + X(8, 2) * B02
F6 = F6 + X(7, 2) * B03
F5 = -X(4, 2) + A01 * X(4, 2) - A01 * X(3, 2) + A02 * X(3, 2)
F5 = F5 - A02 * X(2, 2) + A03 * X(2, 2) - A03 * X(1, 2)
F5 = F5 + X(8, 2) * B01 + X(7, 2) * B02 + X(6, 2) * B03
F4 = X(4, 2) - X(3, 2) + A01 * X(3, 2) - A01 * X(2, 2)
F4 = F4 + A02 * X(2, 2) - A02 * X(1, 2) + A03 * X(1, 2) - A03
F4 = F4 + X(7, 2) * B01 + X(6, 2) * B02 + X(5, 2) * B03
F3 = X(3, 2) - X(2, 2) + A01 * X(2, 2) - A01 * X(1, 2)
F3 = F3 + A02 * X(1, 2) - A02 + A03 + X(6, 2) * B01
F3 = F3 + X(5, 2) * B02
F2 = X(2, 2) - X(1, 2) + A01 * X(1, 2) - A01 + A02
F2 = F2 + X(5, 2) * B01
F1 = X(1, 2) + A01 - 1
PRINT
PRINT "F8="; USING "####.###"; F8
PRINT "F7="; USING "####.###"; F7
PRINT "F6="; USING "####.###"; F6
PRINT "F5="; USING "####.###"; F5
PRINT "F4="; USING "####.###"; F4
PRINT "F3="; USING "####.###"; F3
PRINT "F2="; USING "####.###"; F2
PRINT "F1="; USING "####.###"; F1
PRINT
CASE ELSE
PRINT
PRINT "ERRO ** SUB-PROG. LEITURA ACEITA PROCESSO SO ATE ORDEM 3 **"
STOP
END SELECT
A3 = Y0: A2 = U0
Y4 = Y3: Y3 = Y2: Y2 = Y1: Y1 = Y0
U4 = U3: U3 = U2: U2 = U1: U1 = U0
E4 = E3: E3 = E2: E2 = E1: E1 = E0
S4 = S3: S3 = S2: S2 = S1: S1 = S0
Z = Z + 1: PRINT "ITER="; Z
PRINT "U="; U0; TAB(25); "Y="; USING "#####.#####"; Y0
RETURN
REM ** FIM SUB-ROT. LEITURA **

```



ANEXO 3

TABELAS

TABELA DO EXEMPLO 2.3.1 - RESP. AO DEGRAU UNITARIO

k	r(k)	y(k)	e(k)	u(k)
0	1	0.00	1.00	0.00
1	1	0.00	1.00	2.17
2	1	2.17	-1.17	6.54
3	1	4.58	-3.58	10.59
4	1	6.46	-5.46	13.42
5	1	7.61	-6.61	14.92
6	1	8.07	-7.07	15.28
7	1	8.01	-7.01	14.81
8	1	7.60	-6.60	13.81
9	1	6.97	-5.97	12.52
10	1	6.25	-5.25	11.12
11	1	5.50	-4.50	9.75
12	1	4.79	-3.79	8.46
13	1	4.14	-3.14	7.30
14	1	3.57	-2.57	6.30
15	1	3.08	-2.08	5.44
16	1	2.67	-1.67	4.72
17	1	2.32	-1.32	4.13
18	1	2.04	-1.04	3.66
19	1	1.82	-0.82	3.27
20	1	1.64	-0.64	2.96
21	1	1.49	-0.49	2.72
22	1	1.38	-0.38	2.53
23	1	1.29	-0.29	2.38
24	1	1.22	-0.22	2.27
25	1	1.17	-0.17	2.18
26	1	1.13	-0.13	2.11
27	1	1.10	-0.10	2.06
28	1	1.07	-0.07	2.02
29	1	1.06	-0.06	1.99
30	1	1.04	-0.04	1.97
31	1	1.03	-0.03	1.95
32	1	1.02	-0.02	1.94
33	1	1.02	-0.02	1.93
34	1	1.01	-0.01	1.92
35	1	1.01	-0.01	1.92
36	1	1.01	-0.01	1.91
37	1	1.01	-0.01	1.91
38	1	1.00	-0.00	1.91
39	1	1.00	-0.00	1.90
40	1	1.00	-0.00	1.90
41	1	1.00	-0.00	1.90
42	1	1.00	-0.00	1.90
43	1	1.00	-0.00	1.90
44	1	1.00	-0.00	1.90
45	1	1.00	-0.00	1.90
46	1	1.00	-0.00	1.90
47	1	1.00	-0.00	1.90
48	1	1.00	-0.00	1.90
49	1	1.00	-0.00	1.90
50	1	1.00	-0.00	1.90

TABELA DO EXEMPLO 2.3.1 - RESP. AO DEGRAU UNITARIO

k	r(k)	y(k)	e(k)	u(k)
51	1	1.00	-0.00	1.90
52	1	1.00	-0.00	1.90
53	1	1.00	-0.00	1.90
54	1	1.00	-0.00	1.90
55	1	1.00	-0.00	1.90
56	1	1.00	-0.00	1.90
57	1	1.00	-0.00	1.90
58	1	1.00	-0.00	1.90
59	1	1.00	-0.00	1.90
60	1	1.00	-0.00	1.90
61	1	1.00	-0.00	1.90
62	1	1.00	-0.00	1.90
63	1	1.00	-0.00	1.90
64	1	1.00	-0.00	1.90
65	1	1.00	-0.00	1.90
66	1	1.00	-0.00	1.90
67	1	1.00	-0.00	1.90
68	1	1.00	-0.00	1.90
69	1	1.00	-0.00	1.90
70	1	1.00	-0.00	1.90
71	1	1.00	-0.00	1.90
72	1	1.00	-0.00	1.90
73	1	1.00	-0.00	1.90
74	1	1.00	-0.00	1.90
75	1	1.00	-0.00	1.90
76	1	1.00	-0.00	1.90
77	1	1.00	-0.00	1.90
78	1	1.00	-0.00	1.90
79	1	1.00	-0.00	1.90
80	1	1.00	-0.00	1.90
81	1	1.00	-0.00	1.90
82	1	1.00	-0.00	1.90
83	1	1.00	-0.00	1.90
84	1	1.00	-0.00	1.90
85	1	1.00	-0.00	1.90
86	1	1.00	-0.00	1.90
87	1	1.00	-0.00	1.90
88	1	1.00	-0.00	1.90
89	1	1.00	-0.00	1.90
90	1	1.00	-0.00	1.90
91	1	1.00	-0.00	1.90
92	1	1.00	-0.00	1.90
93	1	1.00	-0.00	1.90
94	1	1.00	-0.00	1.90
95	1	1.00	-0.00	1.90
96	1	1.00	-0.00	1.90
97	1	1.00	-0.00	1.90
98	1	1.00	-0.00	1.90
99	1	1.00	-0.00	1.90

TABELA DO EXEMPLO 2.3.1 - RESP. A RAMPA UNITARIA

k	r(k)	y(k)	e(k)	u(k)
0	0	0.00	0.00	0.00
1	1	0.00	1.00	0.00
2	2	0.00	2.00	2.17
3	3	2.17	0.83	8.71
4	4	6.75	-2.75	19.30
5	5	13.22	-8.22	32.72
6	6	20.82	-14.82	47.64
7	7	28.89	-21.89	62.91
8	8	36.91	-28.91	77.72
9	9	44.50	-35.50	91.53
10	10	51.47	-41.47	104.04
11	11	57.72	-46.72	115.17
12	12	63.22	-51.22	124.91
13	13	68.01	-55.01	133.37
14	14	72.16	-58.16	140.67
15	15	75.73	-60.73	146.97
16	16	78.81	-62.81	152.41
17	17	81.48	-64.48	157.13
18	18	83.80	-65.80	161.26
19	19	85.84	-66.84	164.92
20	20	87.66	-67.66	168.19
21	21	89.30	-68.30	171.16
22	22	90.79	-68.79	173.88
23	23	92.17	-69.17	176.41
24	24	93.46	-69.46	178.79
25	25	94.68	-69.68	181.06
26	26	95.85	-69.85	183.24
27	27	96.98	-69.98	185.36
28	28	98.08	-70.08	187.42
29	29	99.15	-70.15	189.44
30	30	100.20	-70.20	191.43
31	31	101.24	-70.24	193.40
32	32	102.28	-70.28	195.35
33	33	103.30	-70.30	197.28
34	34	104.32	-70.32	199.21
35	35	105.33	-70.33	201.13
36	36	106.34	-70.34	203.05
37	37	107.35	-70.35	204.96
38	38	108.35	-70.35	206.87
39	39	109.35	-70.35	208.78
40	40	110.36	-70.36	210.68
41	41	111.36	-70.36	212.58
42	42	112.36	-70.36	214.49
43	43	113.36	-70.36	216.39
44	44	114.36	-70.36	218.29
45	45	115.36	-70.36	220.19
46	46	116.36	-70.36	222.09
47	47	117.36	-70.36	223.99
48	48	118.36	-70.36	225.89
49	49	119.36	-70.36	227.79
50	50	120.36	-70.36	229.69

TABELA DO EXEMPLO 2.3.1 - RESP. A RAMPA UNITARIA

k	r(k)	y(k)	e(k)	u(k)
51	51	121.36	-70.36	231.59
52	52	122.36	-70.36	233.49
53	53	123.36	-70.36	235.39
54	54	124.36	-70.36	237.29
55	55	125.37	-70.37	239.19
56	56	126.37	-70.37	241.09
57	57	127.37	-70.37	242.99
58	58	128.37	-70.37	244.89
59	59	129.37	-70.37	246.79
60	60	130.37	-70.37	248.69
61	61	131.37	-70.37	250.59
62	62	132.37	-70.37	252.49
63	63	133.37	-70.37	254.39
64	64	134.37	-70.37	256.29
65	65	135.37	-70.37	258.19
66	66	136.37	-70.37	260.09
67	67	137.37	-70.37	261.99
68	68	138.37	-70.37	263.89
69	69	139.37	-70.37	265.79
70	70	140.37	-70.37	267.69
71	71	141.37	-70.37	269.59
72	72	142.37	-70.37	271.49
73	73	143.37	-70.37	273.39
74	74	144.37	-70.37	275.29
75	75	145.37	-70.37	277.19
76	76	146.37	-70.37	279.09
77	77	147.37	-70.37	280.99
78	78	148.37	-70.37	282.89
79	79	149.37	-70.37	284.79
80	80	150.37	-70.37	286.69
81	81	151.37	-70.37	288.59
82	82	152.37	-70.37	290.49
83	83	153.37	-70.37	292.39
84	84	154.37	-70.37	294.29
85	85	155.37	-70.37	296.19
86	86	156.37	-70.37	298.09
87	87	157.37	-70.37	299.99
88	88	158.37	-70.37	301.89
89	89	159.37	-70.37	303.79
90	90	160.37	-70.37	305.69
91	91	161.37	-70.37	307.59
92	92	162.37	-70.37	309.49
93	93	163.37	-70.37	311.39
94	94	164.37	-70.37	313.29
95	95	165.37	-70.37	315.19
96	96	166.37	-70.37	317.09
97	97	167.37	-70.37	318.99
98	98	168.37	-70.37	320.89
99	99	169.37	-70.37	322.79

TABELA DO EXEMPLO 2.3.2 - RESP. A DEGRAU UNITARIO

k	r(k)	y(k)	e(k)	u(k)
0	1	0.00	1.00	0.00
1	1	0.00	1.00	2.59
2	1	2.59	-1.59	1.80
3	1	-0.53	1.53	1.74
4	1	2.21	-1.21	2.15
5	1	0.16	0.84	1.66
6	1	1.52	-0.52	2.11
7	1	0.74	0.26	1.74
8	1	1.07	-0.07	2.01
9	1	1.05	-0.05	1.82
10	1	0.88	0.12	1.95
11	1	1.16	-0.16	1.87
12	1	0.83	0.17	1.91
13	1	1.17	-0.17	1.90
14	1	0.85	0.15	1.90
15	1	1.14	-0.14	1.90
16	1	0.88	0.12	1.89
17	1	1.10	-0.10	1.91
18	1	0.92	0.08	1.89
19	1	1.07	-0.07	1.91
20	1	0.95	0.05	1.89
21	1	1.04	-0.04	1.90
22	1	0.97	0.03	1.90
23	1	1.03	-0.03	1.90
24	1	0.98	0.02	1.90
25	1	1.02	-0.02	1.90
26	1	0.99	0.01	1.90
27	1	1.01	-0.01	1.90
28	1	0.99	0.01	1.90
29	1	1.01	-0.01	1.90
30	1	1.00	0.00	1.90
31	1	1.00	-0.00	1.90
32	1	1.00	0.00	1.90
33	1	1.00	-0.00	1.90
34	1	1.00	0.00	1.90
35	1	1.00	-0.00	1.90
36	1	1.00	0.00	1.90
37	1	1.00	-0.00	1.90
38	1	1.00	0.00	1.90
39	1	1.00	-0.00	1.90
40	1	1.00	0.00	1.90
41	1	1.00	-0.00	1.90
42	1	1.00	0.00	1.90
43	1	1.00	-0.00	1.90
44	1	1.00	0.00	1.90
45	1	1.00	-0.00	1.90
46	1	1.00	0.00	1.90
47	1	1.00	-0.00	1.90
48	1	1.00	0.00	1.90
49	1	1.00	-0.00	1.90
50	1	1.00	0.00	1.90

TABELA DO EXEMPLO 2.3.2 - RESP. A DEGRAU UNITARIO

k	r(k)	y(k)	e(k)	u(k)
51	1	1.00	-0.00	1.90
52	1	1.00	0.00	1.90
53	1	1.00	-0.00	1.90
54	1	1.00	0.00	1.90
55	1	1.00	-0.00	1.90
56	1	1.00	0.00	1.90
57	1	1.00	-0.00	1.90
58	1	1.00	0.00	1.90
59	1	1.00	-0.00	1.90
60	1	1.00	0.00	1.90
61	1	1.00	-0.00	1.90
62	1	1.00	0.00	1.90
63	1	1.00	-0.00	1.90
64	1	1.00	0.00	1.90
65	1	1.00	-0.00	1.90
66	1	1.00	0.00	1.90
67	1	1.00	-0.00	1.90
68	1	1.00	0.00	1.90
69	1	1.00	-0.00	1.90
70	1	1.00	0.00	1.90
71	1	1.00	-0.00	1.90
72	1	1.00	0.00	1.90
73	1	1.00	-0.00	1.90
74	1	1.00	0.00	1.90
75	1	1.00	-0.00	1.90
76	1	1.00	0.00	1.90
77	1	1.00	-0.00	1.90
78	1	1.00	0.00	1.90
79	1	1.00	-0.00	1.90
80	1	1.00	0.00	1.90
81	1	1.00	-0.00	1.90
82	1	1.00	0.00	1.90
83	1	1.00	-0.00	1.90
84	1	1.00	0.00	1.90
85	1	1.00	-0.00	1.90
86	1	1.00	0.00	1.90
87	1	1.00	-0.00	1.90
88	1	1.00	0.00	1.90
89	1	1.00	-0.00	1.90
90	1	1.00	0.00	1.90
91	1	1.00	-0.00	1.90
92	1	1.00	0.00	1.90
93	1	1.00	-0.00	1.90
94	1	1.00	0.00	1.90
95	1	1.00	-0.00	1.90
96	1	1.00	0.00	1.90
97	1	1.00	-0.00	1.90
98	1	1.00	0.00	1.90
99	1	1.00	-0.00	1.90

TABELA DO EXEMPLO 2.3.2 - RESP. A RAMPA UNITARIA

k	r(k)	y(k)	e(k)	u(k)
0	0	0.00	0.00	0.00
1	1	0.00	1.00	0.00
2	2	0.00	2.00	2.59
3	3	2.59	0.41	4.39
4	4	2.06	1.94	6.13
5	5	4.27	0.73	8.28
6	6	4.43	1.57	9.93
7	7	5.95	1.05	12.04
8	8	6.69	1.31	13.78
9	9	7.76	1.24	15.80
10	10	8.81	1.19	17.62
11	11	9.69	1.31	19.57
12	12	10.85	1.15	21.44
13	13	11.68	1.32	23.35
14	14	12.84	1.16	25.25
15	15	13.69	1.31	27.15
16	16	14.83	1.17	29.05
17	17	15.71	1.29	30.95
18	18	16.81	1.19	32.85
19	19	17.73	1.27	34.75
20	20	18.79	1.21	36.65
21	21	19.74	1.26	38.55
22	22	20.78	1.22	40.45
23	23	21.75	1.25	42.35
24	24	22.77	1.23	44.25
25	25	23.75	1.25	46.15
26	26	24.77	1.23	48.05
27	27	25.76	1.24	49.95
28	28	26.77	1.23	51.85
29	29	27.76	1.24	53.75
30	30	28.76	1.24	55.65
31	31	29.76	1.24	57.55
32	32	30.76	1.24	59.45
33	33	31.76	1.24	61.35
34	34	32.76	1.24	63.25
35	35	33.76	1.24	65.15
36	36	34.76	1.24	67.05
37	37	35.76	1.24	68.95
38	38	36.76	1.24	70.85
39	39	37.76	1.24	72.75
40	40	38.76	1.24	74.65
41	41	39.76	1.24	76.55
42	42	40.76	1.24	78.45
43	43	41.76	1.24	80.35
44	44	42.76	1.24	82.25
45	45	43.76	1.24	84.15
46	46	44.76	1.24	86.05
47	47	45.76	1.24	87.95
48	48	46.76	1.24	89.85
49	49	47.76	1.24	91.75
50	50	48.76	1.24	93.65



TABELA DO EXEMPLO 2.3.2 - RESP. A RAMPA UNITARIA

k	r(k)	y(k)	e(k)	u(k)
51	51	49.76	1.24	95.55
52	52	50.76	1.24	97.45
53	53	51.76	1.24	99.35
54	54	52.76	1.24	101.25
55	55	53.76	1.24	103.15
56	56	54.76	1.24	105.05
57	57	55.76	1.24	106.95
58	58	56.76	1.24	108.85
59	59	57.76	1.24	110.75
60	60	58.76	1.24	112.65
61	61	59.76	1.24	114.55
62	62	60.76	1.24	116.45
63	63	61.76	1.24	118.35
64	64	62.76	1.24	120.25
65	65	63.76	1.24	122.15
66	66	64.76	1.24	124.05
67	67	65.76	1.24	125.95
68	68	66.76	1.24	127.85
69	69	67.76	1.24	129.75
70	70	68.76	1.24	131.65
71	71	69.76	1.24	133.55
72	72	70.76	1.24	135.45
73	73	71.76	1.24	137.35
74	74	72.76	1.24	139.25
75	75	73.76	1.24	141.15
76	76	74.76	1.24	143.05
77	77	75.76	1.24	144.95
78	78	76.76	1.24	146.85
79	79	77.76	1.24	148.75
80	80	78.76	1.24	150.65
81	81	79.76	1.24	152.55
82	82	80.76	1.24	154.45
83	83	81.76	1.24	156.35
84	84	82.76	1.24	158.25
85	85	83.76	1.24	160.15
86	86	84.76	1.24	162.05
87	87	85.76	1.24	163.95
88	88	86.76	1.24	165.85
89	89	87.76	1.24	167.75
90	90	88.76	1.24	169.65
91	91	89.76	1.24	171.55
92	92	90.76	1.24	173.45
93	93	91.76	1.24	175.35
94	94	92.76	1.24	177.25
95	95	93.76	1.24	179.15
96	96	94.76	1.24	181.05
97	97	95.76	1.24	182.95
98	98	96.76	1.24	184.85
99	99	97.76	1.24	186.75

TABELA DO EXEMPLO 2.3.3 - RESP. DEGRAU UNITARIO

k	r(k)	y(k)	e(k)	u(k)
0	1	0.00	1.00	0.00
1	1	0.00	1.00	1.32
2	1	2.63	-1.63	1.44
3	1	-0.54	1.54	0.93
4	1	2.15	-1.15	1.40
5	1	0.31	0.69	1.09
6	1	1.28	-0.28	1.25
7	1	1.03	-0.03	1.20
8	1	0.77	0.23	1.18
9	1	1.35	-0.35	1.24
10	1	0.61	0.39	1.17
11	1	1.39	-0.39	1.23
12	1	0.64	0.36	1.18
13	1	1.31	-0.31	1.22
14	1	0.75	0.25	1.19
15	1	1.20	-0.20	1.21
16	1	0.85	0.15	1.20
17	1	1.11	-0.11	1.21
18	1	0.92	0.08	1.20
19	1	1.05	-0.05	1.20
20	1	0.97	0.03	1.20
21	1	1.01	-0.01	1.20
22	1	1.00	0.00	1.20
23	1	1.00	0.00	1.20
24	1	1.01	-0.01	1.20
25	1	0.99	0.01	1.20
26	1	1.01	-0.01	1.20
27	1	0.99	0.01	1.20
28	1	1.01	-0.01	1.20
29	1	0.99	0.01	1.20
30	1	1.01	-0.01	1.20
31	1	0.99	0.01	1.20
32	1	1.01	-0.01	1.20
33	1	0.99	0.01	1.20
34	1	1.00	-0.00	1.20
35	1	1.00	0.00	1.20
36	1	1.00	-0.00	1.20
37	1	1.00	0.00	1.20
38	1	1.00	-0.00	1.20
39	1	1.00	0.00	1.20
40	1	1.00	-0.00	1.20
41	1	1.00	0.00	1.20
42	1	1.00	-0.00	1.20
43	1	1.00	0.00	1.20
44	1	1.00	-0.00	1.20
45	1	1.00	0.00	1.20
46	1	1.00	-0.00	1.20
47	1	1.00	0.00	1.20
48	1	1.00	-0.00	1.20
49	1	1.00	0.00	1.20
50	1	1.00	-0.00	1.20

TABELA DO EXEMPLO 2.3.3 - RESP. DEGRAU UNITARIO

k	r(k)	y(k)	e(k)	u(k)
51	1	1.00	0.00	1.20
52	1	1.00	-0.00	1.20
53	1	1.00	0.00	1.20
54	1	1.00	-0.00	1.20
55	1	1.00	0.00	1.20
56	1	1.00	-0.00	1.20
57	1	1.00	0.00	1.20
58	1	1.00	-0.00	1.20
59	1	1.00	0.00	1.20
60	1	1.00	-0.00	1.20
61	1	1.00	0.00	1.20
62	1	1.00	-0.00	1.20
63	1	1.00	0.00	1.20
64	1	1.00	-0.00	1.20
65	1	1.00	0.00	1.20
66	1	1.00	-0.00	1.20
67	1	1.00	0.00	1.20
68	1	1.00	-0.00	1.20
69	1	1.00	0.00	1.20
70	1	1.00	-0.00	1.20
71	1	1.00	0.00	1.20
72	1	1.00	-0.00	1.20
73	1	1.00	0.00	1.20
74	1	1.00	-0.00	1.20
75	1	1.00	0.00	1.20
76	1	1.00	-0.00	1.20
77	1	1.00	0.00	1.20
78	1	1.00	-0.00	1.20
79	1	1.00	0.00	1.20
80	1	1.00	-0.00	1.20
81	1	1.00	0.00	1.20
82	1	1.00	-0.00	1.20
83	1	1.00	0.00	1.20
84	1	1.00	-0.00	1.20
85	1	1.00	0.00	1.20
86	1	1.00	-0.00	1.20
87	1	1.00	0.00	1.20
88	1	1.00	-0.00	1.20
89	1	1.00	0.00	1.20
90	1	1.00	-0.00	1.20
91	1	1.00	0.00	1.20
92	1	1.00	-0.00	1.20
93	1	1.00	0.00	1.20
94	1	1.00	-0.00	1.20
95	1	1.00	0.00	1.20
96	1	1.00	-0.00	1.20
97	1	1.00	0.00	1.20
98	1	1.00	-0.00	1.20
99	1	1.00	0.00	1.20
100	1	1.00	-0.00	1.20

TABELA DO EXEMPLO 2.3.4 - RESP. A DEGRAU UNITARIO

k	r(k)	y(k)	e(k)	u(k)
0	1	0.00	1.00	0.00
1	1	0.00	1.00	2.37
2	1	2.37	-1.37	4.68
3	1	-0.06	1.06	1.44
4	1	1.56	-0.56	4.04
5	1	0.91	0.09	2.55
6	1	0.72	0.28	2.97
7	1	1.52	-0.52	3.38
8	1	0.35	0.65	2.40
9	1	1.70	-0.70	3.71
10	1	0.31	0.69	2.26
11	1	1.65	-0.65	3.71
12	1	0.42	0.58	2.35
13	1	1.51	-0.51	3.58
14	1	0.57	0.43	2.50
15	1	1.36	-0.36	3.42
16	1	0.70	0.30	2.65
17	1	1.24	-0.24	3.29
18	1	0.81	0.19	2.77
19	1	1.16	-0.16	3.19
20	1	0.88	0.12	2.85
21	1	1.10	-0.10	3.12
22	1	0.92	0.08	2.91
23	1	1.06	-0.06	3.07
24	1	0.95	0.05	2.94
25	1	1.03	-0.03	3.04
26	1	0.97	0.03	2.97
27	1	1.02	-0.02	3.03
28	1	0.98	0.02	2.98
29	1	1.01	-0.01	3.01
30	1	0.99	0.01	2.99
31	1	1.01	-0.01	3.01
32	1	1.00	0.00	2.99
33	1	1.00	-0.00	3.00
34	1	1.00	0.00	3.00
35	1	1.00	-0.00	3.00
36	1	1.00	0.00	3.00
37	1	1.00	-0.00	3.00
38	1	1.00	0.00	3.00
39	1	1.00	-0.00	3.00
40	1	1.00	0.00	3.00
41	1	1.00	-0.00	3.00
42	1	1.00	0.00	3.00
43	1	1.00	-0.00	3.00
44	1	1.00	0.00	3.00
45	1	1.00	-0.00	3.00
46	1	1.00	0.00	3.00
47	1	1.00	-0.00	3.00
48	1	1.00	0.00	3.00
49	1	1.00	-0.00	3.00
50	1	1.00	0.00	3.00

TABELA DO EXEMPLO 2.3.4 - RESP. A DEGRAU UNITARIO

k	r(k)	y(k)	e(k)	u(k)
51	1	1.00	-0.00	3.00
52	1	1.00	0.00	3.00
53	1	1.00	-0.00	3.00
54	1	1.00	0.00	3.00
55	1	1.00	-0.00	3.00
56	1	1.00	0.00	3.00
57	1	1.00	-0.00	3.00
58	1	1.00	0.00	3.00
59	1	1.00	-0.00	3.00
60	1	1.00	0.00	3.00
61	1	1.00	-0.00	3.00
62	1	1.00	0.00	3.00
63	1	1.00	-0.00	3.00
64	1	1.00	0.00	3.00
65	1	1.00	-0.00	3.00
66	1	1.00	0.00	3.00
67	1	1.00	-0.00	3.00
68	1	1.00	0.00	3.00
69	1	1.00	-0.00	3.00
70	1	1.00	0.00	3.00
71	1	1.00	-0.00	3.00
72	1	1.00	0.00	3.00
73	1	1.00	-0.00	3.00
74	1	1.00	0.00	3.00
75	1	1.00	-0.00	3.00
76	1	1.00	0.00	3.00
77	1	1.00	-0.00	3.00
78	1	1.00	0.00	3.00
79	1	1.00	-0.00	3.00
80	1	1.00	0.00	3.00
81	1	1.00	-0.00	3.00
82	1	1.00	0.00	3.00
83	1	1.00	-0.00	3.00
84	1	1.00	0.00	3.00
85	1	1.00	-0.00	3.00
86	1	1.00	0.00	3.00
87	1	1.00	-0.00	3.00
88	1	1.00	0.00	3.00
89	1	1.00	-0.00	3.00
90	1	1.00	0.00	3.00
91	1	1.00	-0.00	3.00
92	1	1.00	0.00	3.00
93	1	1.00	-0.00	3.00
94	1	1.00	0.00	3.00
95	1	1.00	-0.00	3.00
96	1	1.00	0.00	3.00
97	1	1.00	-0.00	3.00
98	1	1.00	0.00	3.00
99	1	1.00	-0.00	3.00

TABELA DO EXEMPLO 2.3.5 - RESP. DEGRAU UNITARIO

k	r(k)	y(k)	e(k)	u(k)
0	1	0.00	1.00	0.00
1	1	0.00	1.00	0.15
2	1	0.15	0.85	0.06
3	1	0.70	0.30	-0.05
4	1	1.41	-0.41	-0.11
5	1	2.03	-1.03	-0.12
6	1	2.43	-1.43	-0.09
7	1	2.57	-1.57	-0.05
8	1	2.48	-1.48	-0.01
9	1	2.22	-1.22	0.01
10	1	1.87	-0.87	0.03
11	1	1.50	-0.50	0.04
12	1	1.14	-0.14	0.05
13	1	0.82	0.18	0.04
14	1	0.58	0.42	0.04
15	1	0.39	0.61	0.03
16	1	0.27	0.73	0.02
17	1	0.21	0.79	0.02
18	1	0.19	0.81	0.01
19	1	0.21	0.79	0.00
20	1	0.25	0.75	0.00
21	1	0.30	0.70	-0.00
22	1	0.37	0.63	-0.00
23	1	0.44	0.56	-0.00
24	1	0.51	0.49	-0.00
25	1	0.58	0.42	-0.00
26	1	0.64	0.36	-0.00
27	1	0.69	0.31	-0.00
28	1	0.74	0.26	-0.00
29	1	0.79	0.21	-0.00
30	1	0.82	0.18	-0.00
31	1	0.86	0.14	-0.00
32	1	0.88	0.12	-0.00
33	1	0.91	0.09	0.00
34	1	0.92	0.08	0.00
35	1	0.94	0.06	0.00
36	1	0.95	0.05	0.00
37	1	0.96	0.04	0.00
38	1	0.97	0.03	0.00
39	1	0.98	0.02	0.00
40	1	0.98	0.02	0.00
41	1	0.99	0.01	0.00
42	1	0.99	0.01	0.00
43	1	0.99	0.01	0.00
44	1	0.99	0.01	0.00
45	1	0.99	0.01	0.00
46	1	1.00	0.00	0.00
47	1	1.00	0.00	0.00
48	1	1.00	0.00	0.00
49	1	1.00	0.00	0.00
50	1	1.00	0.00	0.00

TABELA DO EXEMPLO 2.3.5 - RESP. DEGRAU UNITARIO

k	r(k)	y(k)	e(k)	u(k)
51	1	1.00	0.00	0.00
52	1	1.00	0.00	0.00
53	1	1.00	0.00	0.00
54	1	1.00	0.00	0.00
55	1	1.00	0.00	0.00
56	1	1.00	0.00	0.00
57	1	1.00	0.00	0.00
58	1	1.00	0.00	0.00
59	1	1.00	0.00	0.00
60	1	1.00	0.00	0.00
61	1	1.00	0.00	0.00
62	1	1.00	0.00	0.00
63	1	1.00	0.00	0.00
64	1	1.00	0.00	0.00
65	1	1.00	0.00	0.00
66	1	1.00	0.00	0.00
67	1	1.00	0.00	0.00
68	1	1.00	0.00	0.00
69	1	1.00	0.00	0.00
70	1	1.00	0.00	0.00
71	1	1.00	0.00	0.00
72	1	1.00	0.00	0.00
73	1	1.00	0.00	0.00
74	1	1.00	0.00	0.00
75	1	1.00	0.00	0.00
76	1	1.00	0.00	0.00
77	1	1.00	0.00	0.00
78	1	1.00	0.00	0.00
79	1	1.00	0.00	0.00
80	1	1.00	0.00	0.00
81	1	1.00	0.00	0.00
82	1	1.00	0.00	0.00
83	1	1.00	-0.00	0.00
84	1	1.00	-0.00	0.00
85	1	1.00	-0.00	0.00
86	1	1.00	-0.00	0.00
87	1	1.00	-0.00	0.00
88	1	1.00	-0.00	0.00
89	1	1.00	-0.00	0.00
90	1	1.00	-0.00	0.00
91	1	1.00	-0.00	0.00
92	1	1.00	-0.00	0.00
93	1	1.00	-0.00	0.00
94	1	1.00	-0.00	0.00
95	1	1.00	-0.00	0.00
96	1	1.00	-0.00	0.00
97	1	1.00	-0.00	0.00
98	1	1.00	-0.00	0.00
99	1	1.00	-0.00	0.00
100	1	1.00	-0.00	0.00

TABELA DO EXEMPLO 3.3.1

k	y(k)	u(k)	A1	B1
0	0.00	3.00	0.00	0.00
1	6.00	1.00	0.00	2.00
2	-2.80	0.00	0.80	2.00
3	2.24	2.00	0.80	2.00
4	2.21	8.00	0.80	2.00
5	14.23	6.00	0.80	2.00
6	0.61	0.00	0.80	2.00
7	-0.49	2.00	0.80	2.00
8	4.39	9.00	0.80	2.00
9	14.49	8.00	0.80	2.00
10	4.41	1.00	0.80	2.00
11	-1.53	4.00	0.80	2.00
12	9.22	1.00	0.80	2.00
13	-5.38	3.00	0.80	2.00
14	10.30	2.00	0.80	2.00
15	-4.24	7.00	0.80	2.00
16	17.39	0.00	0.80	2.00
17	-13.92	1.00	0.80	2.00
18	13.13	1.00	0.80	2.00
19	-8.51	1.00	0.80	2.00
20	8.80	1.00	0.80	2.00
21	-5.04	1.00	0.80	2.00
22	6.03	1.00	0.80	2.00
23	-2.83	1.00	0.80	2.00
24	4.26	1.00	0.80	2.00
25	-1.41	1.00	0.80	2.00
26	3.13	1.00	0.80	2.00
27	-0.50	1.00	0.80	2.00
28	2.40	1.00	0.80	2.00
29	0.08	1.00	0.80	2.00
30	1.94	1.00	0.80	2.00
31	0.45	1.00	0.80	2.00
32	1.64	1.00	0.80	2.00
33	0.69	1.00	0.80	2.00
34	1.45	1.00	0.80	2.00
35	0.84	1.00	0.80	2.00
36	1.33	1.00	0.80	2.00
37	0.94	1.00	0.80	2.00
38	1.25	1.00	0.80	2.00
39	1.00	1.00	0.80	2.00
40	1.20	1.00	0.80	2.00
41	1.04	1.00	0.80	2.00
42	1.17	1.00	0.80	2.00
43	1.07	1.00	0.80	2.00
44	1.15	1.00	0.80	2.00
45	1.08	1.00	0.80	2.00
46	1.13	1.00	0.80	2.00
47	1.09	1.00	0.80	2.00
48	1.13	1.00	0.80	2.00
49	1.10	1.00	0.80	2.00
50	1.12	1.00	0.80	2.00



TABELA DO EXEMPLO 3.3.2

k	y(k)	u(k)	A1	A2	B1	B2
0	0.00	3.00	0.00	0.00	0.00	0.00
1	6.00	1.00	0.00	0.00	2.00	0.00
2	-5.80	0.00	1.04	0.00	2.00	-0.52
3	6.58	2.00	1.07	-0.13	2.00	-0.45
4	-3.15	8.00	1.80	0.81	2.00	1.00
5	18.33	6.00	1.80	0.81	2.00	1.00
6	-10.45	0.00	1.80	0.81	2.00	1.00
7	9.96	2.00	1.80	0.81	2.00	1.00
8	-5.47	9.00	1.80	0.81	2.00	1.00
9	21.77	8.00	1.80	0.81	2.00	1.00
10	-9.76	1.00	1.80	0.81	2.00	1.00
11	9.93	4.00	1.80	0.81	2.00	1.00
12	-0.97	1.00	1.80	0.81	2.00	1.00
13	-0.29	3.00	1.80	0.81	2.00	1.00
14	8.32	2.00	1.80	0.81	2.00	1.00
15	-7.73	7.00	1.80	0.81	2.00	1.00
16	23.18	1.00	1.80	0.81	2.00	1.00
17	-26.46	1.00	1.80	0.81	2.00	1.00
18	31.86	1.00	1.80	0.81	2.00	1.00
19	-32.91	1.00	1.80	0.81	2.00	1.00
20	36.43	1.00	1.80	0.81	2.00	1.00
21	-35.92	1.00	1.80	0.81	2.00	1.00
22	38.14	1.00	1.80	0.81	2.00	1.00
23	-36.57	1.00	1.80	0.81	2.00	1.00
24	37.92	1.00	1.80	0.81	2.00	1.00
25	-35.64	1.00	1.80	0.81	2.00	1.00
26	36.44	1.00	1.80	0.81	2.00	1.00
27	-33.72	1.00	1.80	0.81	2.00	1.00
28	34.18	1.00	1.80	0.81	2.00	1.00
29	-31.21	1.00	1.80	0.81	2.00	1.00
30	31.49	1.00	1.80	0.81	2.00	1.00
31	-28.41	1.00	1.80	0.81	2.00	1.00
32	28.62	1.00	1.80	0.81	2.00	1.00
33	-25.51	1.00	1.80	0.81	2.00	1.00
34	25.74	1.00	1.80	0.81	2.00	1.00
35	-22.66	1.00	1.80	0.81	2.00	1.00
36	22.94	1.00	1.80	0.81	2.00	1.00
37	-19.94	1.00	1.80	0.81	2.00	1.00
38	20.31	1.00	1.80	0.81	2.00	1.00
39	-17.41	1.00	1.80	0.81	2.00	1.00
40	17.88	1.00	1.80	0.81	2.00	1.00
41	-15.09	1.00	1.80	0.81	2.00	1.00
42	15.68	1.00	1.80	0.81	2.00	1.00
43	-12.99	1.00	1.80	0.81	2.00	1.00
44	13.69	1.00	1.80	0.81	2.00	1.00
45	-11.12	1.00	1.80	0.81	2.00	1.00
46	11.92	1.00	1.80	0.81	2.00	1.00
47	-9.46	1.00	1.80	0.81	2.00	1.00
48	10.36	1.00	1.80	0.81	2.00	1.00
49	-7.99	1.00	1.80	0.81	2.00	1.00
50	9.00	1.00	1.80	0.81	2.00	1.00

TABELA DO EXEMPLO 3.3.3

k	y(k)	u(k)	A1	A2	B1	B2
0	0.00	3.00	0.00	0.00	0.00	0.00
1	6.00	1.00	0.00	0.00	2.00	0.00
2	-5.80	0.00	1.04	0.00	2.00	-0.52
3	6.58	2.00	1.07	-0.13	2.00	-0.45
4	-3.15	8.00	1.80	0.81	2.00	1.00
5	18.33	6.00	1.80	0.81	2.00	1.00
6	-10.45	0.00	1.80	0.81	2.00	1.00
7	9.96	2.00	1.80	0.81	2.00	1.00
8	-5.47	9.00	1.80	0.81	2.00	1.00
9	21.77	8.00	1.80	0.81	2.00	1.00
10	-9.76	1.00	1.80	0.81	2.00	1.00
11	9.93	4.00	1.80	0.81	2.00	1.00
12	-0.97	1.00	1.80	0.81	2.00	1.00
13	-0.29	3.00	1.80	0.81	2.00	1.00
14	8.32	2.00	1.80	0.81	2.00	1.00
15	-7.73	7.00	1.80	0.81	2.00	1.00
16	23.18	0.00	1.80	0.81	2.00	1.00
17	-28.46	1.00	1.80	0.81	2.00	1.00
18	34.46	2.00	1.80	0.81	2.00	1.00
19	-33.97	0.00	1.80	0.81	2.00	1.00
20	35.23	1.00	1.80	0.81	2.00	1.00
21	-33.90	5.00	1.80	0.81	2.00	1.00
22	-110.22	3.00	-2.94	-3.24	-27.30	11.66
23	-188.45	2.00	-1.14	-1.40	-26.73	12.97
24	-273.24	1.00	-0.60	-0.92	-23.65	-4.14
25	-368.09	8.00	-2.13	1.11	-0.11	1.72
26	-469.18	5.00	-2.20	1.21	1.00	2.00
27	-565.81	3.00	-2.20	1.21	1.00	2.00
28	-664.08	6.00	-2.20	1.21	1.00	2.00
29	-764.34	7.00	-2.20	1.21	1.00	2.00
30	-859.01	0.00	-2.20	1.21	1.00	2.00
31	-950.97	7.00	-2.20	1.21	1.00	2.00
32	-1045.73	2.00	-2.20	1.21	1.00	2.00
33	-1133.94	4.00	-2.20	1.21	1.00	2.00
34	-1221.33	9.00	-2.20	1.21	1.00	2.00
35	-1297.86	5.00	-2.20	1.21	1.00	2.00
36	-1354.48	3.00	-2.20	1.21	1.00	2.00
37	-1396.44	6.00	-2.20	1.21	1.00	2.00
38	-1421.26	8.00	-2.20	1.21	1.00	2.00
39	-1417.07	3.00	-2.20	1.21	1.00	2.00
40	-1378.84	2.00	-2.20	1.21	1.00	2.00
41	-1310.79	9.00	-2.20	1.21	1.00	2.00
42	-1202.33	3.00	-2.20	1.21	1.00	2.00
43	-1038.08	3.00	-2.20	1.21	1.00	2.00
44	-819.96	9.00	-2.20	1.21	1.00	2.00
45	-532.83	4.00	-2.20	1.21	1.00	2.00
46	-158.08	5.00	-2.20	1.21	1.00	2.00
47	309.96	8.00	-2.20	1.21	1.00	2.00
48	891.18	4.00	-2.20	1.21	1.00	2.00
49	1605.55	9.00	-2.20	1.21	1.00	2.00
50	2470.87	1.00	-2.20	1.21	1.00	2.00

TABELA DO EXEMPLO 4.4.1

k	r(k)	y(k)	e(k)	u(k)	A1	B1
0	1	0.00	1.00	0.00	0.00	0.00
1	1	0.00	1.00	2.17	0.00	0.00
2	1	2.17	-1.17	6.54	0.00	1.00
3	1	4.58	-3.58	10.59	0.90	1.00
4	1	6.46	-5.46	13.42	0.90	1.00
5	1	7.61	-6.61	14.92	0.90	1.00
6	1	8.07	-7.07	15.28	0.90	1.00
7	1	8.01	-7.01	14.81	0.90	1.00
8	1	7.60	-6.60	13.81	0.90	1.00
9	1	6.97	-5.97	12.52	0.90	1.00
10	1	6.25	-5.25	11.12	0.90	1.00
11	1	5.50	-4.50	9.75	0.90	1.00
12	1	4.79	-3.79	8.46	0.90	1.00
13	1	4.14	-3.14	7.30	0.90	1.00
14	1	3.57	-2.57	6.30	0.90	1.00
15	1	3.08	-2.08	5.44	0.90	1.00
16	1	2.67	-1.67	4.72	0.90	1.00
17	1	2.32	-1.32	4.13	0.90	1.00
18	1	2.04	-1.04	3.66	0.90	1.00
19	1	1.82	-0.82	3.27	0.90	1.00
20	1	1.64	-0.64	2.96	0.90	1.00
21	1	1.49	-0.49	2.72	0.90	1.00
22	1	1.38	-0.38	2.53	0.90	1.00
23	1	1.29	-0.29	2.38	0.90	1.00
24	1	1.22	-0.22	2.27	0.90	1.00
25	1	1.17	-0.17	2.18	0.90	1.00
26	1	1.13	-0.13	2.11	0.90	1.00
27	1	1.10	-0.10	2.06	0.90	1.00
28	1	1.07	-0.07	2.02	0.90	1.00
29	1	1.06	-0.06	1.99	0.90	1.00
30	1	1.04	-0.04	1.97	0.90	1.00
31	1	1.03	-0.03	1.95	0.90	1.00
32	1	1.02	-0.02	1.94	0.90	1.00
33	1	1.02	-0.02	1.93	0.90	1.00
34	1	1.01	-0.01	1.92	0.90	1.00
35	1	1.01	-0.01	1.92	0.90	1.00
36	1	1.01	-0.01	1.91	0.90	1.00
37	1	1.01	-0.01	1.91	0.90	1.00
38	1	1.00	-0.00	1.91	0.90	1.00
39	1	1.00	-0.00	1.90	0.90	1.00
40	1	1.00	-0.00	1.90	0.90	1.00
41	1	1.00	-0.00	1.90	0.90	1.00
42	1	1.00	-0.00	1.90	0.90	1.00
43	1	1.00	-0.00	1.90	0.90	1.00
44	1	1.00	-0.00	1.90	0.90	1.00
45	1	1.00	-0.00	1.90	0.90	1.00
46	1	1.00	-0.00	1.90	0.90	1.00
47	1	1.00	-0.00	1.90	0.90	1.00
48	1	1.00	-0.00	1.90	0.90	1.00
49	1	1.00	-0.00	1.90	0.90	1.00
50	1	1.00	-0.00	1.90	0.90	1.00
51	1	1.00	-0.00	1.90	0.90	1.00

TABELA DO EXEMPLO

4.4.1

k	r(k)	y(k)	e(k)	u(k)	A1	B1
52	1	1.00	-0.00	1.90	0.90	1.00
53	1	1.00	-0.00	1.90	0.90	1.00
54	1	1.00	-0.00	1.90	0.90	1.00
55	1	1.00	-0.00	1.90	0.90	1.00
56	1	1.00	-0.00	1.90	0.90	1.00
57	1	1.00	-0.00	1.90	0.90	1.00
58	1	1.00	-0.00	1.90	0.90	1.00
59	1	1.00	-0.00	1.90	0.90	1.00
60	1	1.00	-0.00	1.90	0.90	1.00
61	1	1.00	-0.00	1.90	0.90	1.00
62	1	1.00	-0.00	1.90	0.90	1.00
63	1	1.00	-0.00	1.90	0.90	1.00
64	1	1.00	-0.00	1.90	0.90	1.00
65	1	1.00	-0.00	1.90	0.90	1.00
66	1	1.00	-0.00	1.90	0.90	1.00
67	1	1.00	-0.00	1.90	0.90	1.00
68	1	1.00	-0.00	1.90	0.90	1.00
69	1	1.00	-0.00	1.90	0.90	1.00
70	1	1.00	-0.00	1.90	0.90	1.00
71	1	1.80	-0.80	1.90	0.82	1.17
72	1	0.20	0.80	0.57	2.00	2.00
73	1	0.75	0.25	1.71	2.00	2.00
74	1	1.92	-0.92	3.44	2.00	2.00
75	1	3.03	-2.03	4.94	2.00	2.00
76	1	3.82	-2.82	5.95	2.00	2.00
77	1	4.26	-3.26	6.46	2.00	2.00
78	1	4.39	-3.39	6.54	2.00	2.00
79	1	4.30	-3.30	6.33	2.00	2.00
80	1	4.06	-3.06	5.93	2.00	2.00
81	1	3.74	-2.74	5.44	2.00	2.00
82	1	3.39	-2.39	4.91	2.00	2.00
83	1	3.04	-2.04	4.39	2.00	2.00
84	1	2.71	-1.71	3.91	2.00	2.00
85	1	2.41	-1.41	3.48	2.00	2.00
86	1	2.15	-1.15	3.11	2.00	2.00
87	1	1.92	-0.92	2.79	2.00	2.00
88	1	1.74	-0.74	2.53	2.00	2.00
89	1	1.58	-0.58	2.31	2.00	2.00
90	1	1.46	-0.46	2.14	2.00	2.00
91	1	1.36	-0.36	2.00	2.00	2.00
92	1	1.28	-0.28	1.89	2.00	2.00
93	1	1.22	-0.22	1.80	2.00	2.00
94	1	1.17	-0.17	1.73	2.00	2.00
95	1	1.13	-0.13	1.68	2.00	2.00
96	1	1.10	-0.10	1.63	2.00	2.00
97	1	1.07	-0.07	1.60	2.00	2.00
98	1	1.06	-0.06	1.58	2.00	2.00
99	1	1.04	-0.04	1.56	2.00	2.00
100	1	1.03	-0.03	1.54	2.00	2.00

TABELA DO EXEMPLO

4.4.2

k	r(k)	y(k)	e(k)	u(k)	A1	B1
0	1	0.00	1.00	0.00	0.00	0.00
1	1	0.00	1.00	2.37	0.00	0.00
2	1	2.37	-1.37	4.68	0.00	1.00
3	1	-0.06	1.06	1.44	2.00	1.00
4	1	1.56	-0.56	4.04	2.00	1.00
5	1	0.91	0.09	2.55	2.00	1.00
6	1	0.72	0.28	2.97	2.00	1.00
7	1	1.52	-0.52	3.38	2.00	1.00
8	1	0.35	0.65	2.40	2.00	1.00
9	1	1.70	-0.70	3.71	2.00	1.00
10	1	0.31	0.69	2.26	2.00	1.00
11	1	1.65	-0.65	3.71	2.00	1.00
12	1	0.42	0.58	2.35	2.00	1.00
13	1	1.51	-0.51	3.58	2.00	1.00
14	1	0.57	0.43	2.50	2.00	1.00
15	1	1.36	-0.36	3.42	2.00	1.00
16	1	0.70	0.30	2.65	2.00	1.00
17	1	1.24	-0.24	3.29	2.00	1.00
18	1	0.81	0.19	2.77	2.00	1.00
19	1	1.16	-0.16	3.19	2.00	1.00
20	1	0.88	0.12	2.85	2.00	1.00
21	1	1.10	-0.10	3.12	2.00	1.00
22	1	0.92	0.08	2.91	2.00	1.00
23	1	1.06	-0.06	3.07	2.00	1.00
24	1	0.95	0.05	2.94	2.00	1.00
25	1	1.03	-0.03	3.04	2.00	1.00
26	1	0.97	0.03	2.97	2.00	1.00
27	1	1.02	-0.02	3.03	2.00	1.00
28	1	0.98	0.02	2.98	2.00	1.00
29	1	1.01	-0.01	3.01	2.00	1.00
30	1	0.99	0.01	2.99	2.00	1.00
31	1	1.01	-0.01	3.01	2.00	1.00
32	1	1.00	0.00	2.99	2.00	1.00
33	1	1.00	-0.00	3.00	2.00	1.00
34	1	1.00	0.00	3.00	2.00	1.00
35	1	1.00	-0.00	3.00	2.00	1.00
36	1	1.00	0.00	3.00	2.00	1.00
37	1	1.00	-0.00	3.00	2.00	1.00
38	1	1.00	0.00	3.00	2.00	1.00
39	1	1.00	-0.00	3.00	2.00	1.00
40	1	1.00	0.00	3.00	2.00	1.00
41	1	1.00	-0.00	3.00	2.00	1.00
42	1	1.00	0.00	3.00	2.00	1.00
43	1	1.00	-0.00	3.00	2.00	1.00
44	1	1.00	0.00	3.00	2.00	1.00
45	1	1.00	-0.00	3.00	2.00	1.00
46	1	1.00	0.00	3.00	2.00	1.00
47	1	1.00	-0.00	3.00	2.00	1.00
48	1	1.00	0.00	3.00	2.00	1.00
49	1	1.00	-0.00	3.00	2.00	1.00
50	1	1.00	0.00	3.00	2.00	1.00
51	1	1.00	-0.00	3.00	2.00	1.00

TABELA DO EXEMPLO

4.4.2

k	r(k)	y(k)	e(k)	u(k)	A1	B1
52	1	1.00	0.00	3.00	2.00	1.00
53	1	1.00	-0.00	3.00	2.00	1.00
54	1	1.00	0.00	3.00	2.00	1.00
55	1	1.00	-0.00	3.00	2.00	1.00
56	1	1.00	0.00	3.00	2.00	1.00
57	1	1.00	-0.00	3.00	2.00	1.00
58	1	1.00	0.00	3.00	2.00	1.00
59	1	1.00	-0.00	3.00	2.00	1.00
60	1	1.00	0.00	3.00	2.00	1.00
61	1	1.00	-0.00	3.00	2.00	1.00
62	1	1.00	0.00	3.00	2.00	1.00
63	1	1.00	-0.00	3.00	2.00	1.00
64	1	1.00	0.00	3.00	2.00	1.00
65	1	1.00	-0.00	3.00	2.00	1.00
66	1	1.00	0.00	3.00	2.00	1.00
67	1	1.00	-0.00	3.00	2.00	1.00
68	1	1.00	0.00	3.00	2.00	1.00
69	1	1.00	-0.00	3.00	2.00	1.00
70	1	1.00	0.00	3.00	2.00	1.00
71	1	2.10	-1.10	3.00	1.97	1.17
72	1	1.11	-0.11	0.80	0.90	1.00
73	1	-0.20	1.20	2.80	0.90	1.00
74	1	2.97	-1.97	1.25	0.90	1.00
75	1	-1.42	2.42	2.32	0.90	1.00
76	1	3.60	-2.60	1.67	0.90	1.00
77	1	-1.57	2.57	2.00	0.90	1.00
78	1	3.41	-2.41	1.90	0.90	1.00
79	1	-1.17	2.17	1.85	0.90	1.00
80	1	2.90	-1.90	1.98	0.90	1.00
81	1	-0.63	1.63	1.80	0.90	1.00
82	1	2.37	-1.37	2.00	0.90	1.00
83	1	-0.13	1.13	1.81	0.90	1.00
84	1	1.92	-0.92	1.99	0.90	1.00
85	1	0.25	0.75	1.83	0.90	1.00
86	1	1.60	-0.60	1.96	0.90	1.00
87	1	0.53	0.47	1.85	0.90	1.00
88	1	1.37	-0.37	1.94	0.90	1.00
89	1	0.71	0.29	1.86	0.90	1.00
90	1	1.23	-0.23	1.93	0.90	1.00
91	1	0.83	0.17	1.88	0.90	1.00
92	1	1.13	-0.13	1.92	0.90	1.00
93	1	0.90	0.10	1.89	0.90	1.00
94	1	1.08	-0.08	1.91	0.90	1.00
95	1	0.94	0.06	1.89	0.90	1.00
96	1	1.05	-0.05	1.91	0.90	1.00
97	1	0.97	0.03	1.89	0.90	1.00
98	1	1.03	-0.03	1.90	0.90	1.00
99	1	0.98	0.02	1.90	0.90	1.00

TABELA DO EXEMPLO			4.4.3	- COM RETENCAO DE PARAMETROS		
k	r(k)	y(k)	e(k)	u(k)	A1	B1
0	0.0	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
1	0.5	0.00	0.50	0.00	0.00	0.00
2	1.0	0.00	1.00	0.75	0.00	0.00
3	1.0	0.75	0.25	1.90	0.00	1.00
4	1.0	1.22	-0.22	2.02	0.90	1.00
5	1.0	0.92	0.08	1.83	0.90	1.00
6	1.0	1.01	-0.01	1.92	0.90	1.00
7	1.0	1.01	-0.01	1.90	0.90	1.00
8	1.0	0.98	0.02	1.90	0.90	1.00
9	1.0	1.01	-0.01	1.90	0.90	1.00
10	1.0	0.99	0.01	1.90	0.90	1.00
11	1.0	1.00	-0.00	1.90	0.90	1.00
12	1.0	1.00	0.00	1.90	0.90	1.00
13	1.0	1.00	-0.00	1.90	0.90	1.00
14	1.0	1.00	0.00	1.90	0.90	1.00
15	1.0	1.00	-0.00	1.90	0.90	1.00
16	1.0	1.00	0.00	1.90	0.90	1.00
17	1.0	1.00	-0.00	1.90	0.90	1.00
18	1.0	1.00	0.00	1.90	0.90	1.00
19	1.0	1.00	-0.00	1.90	0.90	1.00
20	1.0	1.00	0.00	1.90	0.90	1.00
21	1.0	1.00	-0.00	1.90	0.90	1.00
22	1.0	1.00	0.00	1.90	0.90	1.00
23	1.0	1.00	-0.00	1.90	0.90	1.00
24	1.0	1.00	0.00	1.90	0.90	1.00
25	1.0	1.00	-0.00	1.90	0.90	1.00
26	1.0	1.00	0.00	1.90	0.90	1.00
27	1.0	1.00	-0.00	1.90	0.90	1.00
28	1.0	1.00	0.00	1.90	0.90	1.00
29	1.0	1.00	-0.00	1.90	0.90	1.00
30	1.0	1.00	0.00	1.90	0.90	1.00
31	1.0	1.00	-0.00	1.90	0.90	1.00
32	1.0	1.00	0.00	1.90	0.90	1.00
33	1.0	1.00	-0.00	1.90	0.90	1.00
34	1.0	1.00	0.00	1.90	0.90	1.00
35	1.0	1.00	-0.00	1.90	0.90	1.00
36	1.0	1.00	0.00	1.90	0.90	1.00
37	1.0	1.00	-0.00	1.90	0.90	1.00
38	1.0	1.00	0.00	1.90	0.90	1.00
39	1.0	1.00	-0.00	1.90	0.90	1.00
40	1.0	1.00	0.00	1.90	0.90	1.00
41	1.0	1.00	-0.00	1.90	0.90	1.00
42	1.0	1.00	0.00	1.90	0.90	1.00
43	1.0	1.00	-0.00	1.90	0.90	1.00
44	1.0	1.00	0.00	1.90	0.90	1.00
45	1.0	1.00	-0.00	1.90	0.90	1.00
46	1.0	1.00	0.00	1.90	0.90	1.00
47	1.0	1.00	-0.00	1.90	0.90	1.00
48	1.0	1.00	0.00	1.90	0.90	1.00
49	1.0	1.00	-0.00	1.90	0.90	1.00
50	1.0	1.00	0.00	1.90	0.90	1.00
51	1.0	1.00	-0.00	1.90	0.90	1.00

TABELA DO EXEMPLO 4.4.3 - COM RETENCAO DE PARAMETROS

k	r(k)	y(k)	e(k)	u(k)	A1	B1
52	1.0	1.00	0.00	1.90	0.90	1.00
53	1.0	1.00	-0.00	1.90	0.90	1.00
54	1.0	1.00	0.00	1.90	0.90	1.00
55	1.0	1.00	0.00	1.90	0.90	1.00
56	1.0	1.00	0.00	1.90	0.90	1.00
57	1.0	1.00	0.00	1.90	0.90	1.00
58	1.0	1.00	0.00	1.90	0.90	1.00
59	1.0	1.00	0.00	1.90	0.90	1.00
60	1.0	1.00	-0.00	1.90	0.90	1.00
61	1.0	1.00	0.00	1.90	0.90	1.00
62	1.0	1.00	0.00	1.90	0.90	1.00
63	1.0	1.00	0.00	1.90	0.90	1.00
64	1.0	1.00	0.00	1.90	0.90	1.00
65	1.0	1.00	0.00	1.90	0.90	1.00
66	1.0	1.00	0.00	1.90	0.90	1.00
67	1.0	1.00	0.00	1.90	0.90	1.00
68	1.0	1.00	0.00	1.90	0.90	1.00
69	1.0	1.00	-0.00	1.90	0.90	1.00
70	1.0	1.00	0.00	1.90	0.90	1.00
71	1.0	1.00	0.00	1.90	0.90	1.00
72	1.0	1.00	0.00	1.90	0.90	1.00
73	1.0	1.05	-0.05	1.90	0.89	1.01
74	1.0	1.00	-0.00	1.82	0.94	1.05
75	1.0	0.97	0.03	1.86	0.94	1.05
76	1.0	1.03	-0.03	1.86	0.94	1.05
77	1.0	0.97	0.03	1.84	0.94	1.05
78	1.0	1.02	-0.02	1.86	0.94	1.05
79	1.0	0.99	0.01	1.85	0.94	1.05
80	1.0	1.01	-0.01	1.85	0.94	1.05
81	1.0	1.00	0.00	1.85	0.94	1.05
82	1.0	1.00	-0.00	1.85	0.94	1.05
83	1.0	1.00	0.00	1.85	0.94	1.05
84	1.0	1.00	-0.00	1.85	0.94	1.05
85	1.0	1.00	0.00	1.85	0.94	1.05
86	1.0	1.05	-0.05	1.85	8.42	5.10
87	1.0	1.00	-0.00	1.78	1.00	1.11
88	1.0	0.97	0.03	1.81	0.99	1.10
89	1.0	1.03	-0.03	1.81	0.99	1.10
90	1.0	0.98	0.02	1.80	0.99	1.10
91	1.0	1.01	-0.01	1.81	0.99	1.10
92	1.0	0.99	0.01	1.80	0.99	1.10
93	1.0	1.00	-0.00	1.81	0.99	1.10
94	1.0	1.00	0.00	1.81	0.99	1.10
95	1.0	1.00	-0.00	1.81	0.99	1.10
96	1.0	1.00	0.00	1.81	0.99	1.10
97	1.0	1.00	-0.00	1.81	0.99	1.10
98	1.0	1.00	0.00	1.81	0.99	1.10
99	1.0	1.05	-0.05	1.81	3.15	2.31
100	1.0	1.00	0.00	1.74	1.04	1.16
101	1.0	0.97	0.03	1.77	1.04	1.16
102	1.0	1.03	-0.03	1.77	1.04	1.16
103	1.0	0.98	0.02	1.76	1.04	1.16



TABELA DO EXEMPLO 4.4.3 - COM RETENCAO DE PARAMETROS

k	r(k)	y(k)	e(k)	u(k)	A1	B1
104	1.0	1.01	-0.01	1.77	1.04	1.16
105	1.0	0.99	0.01	1.76	1.04	1.16
106	1.0	1.00	-0.00	1.77	1.04	1.16
107	1.0	1.00	0.00	1.76	1.04	1.16
108	1.0	1.00	-0.00	1.76	1.04	1.16
109	1.0	1.00	0.00	1.76	1.04	1.16
110	1.0	1.00	-0.00	1.76	1.04	1.16
111	1.0	1.00	0.00	1.76	1.04	1.16
112	1.0	1.05	-0.05	1.76	6.75	4.41
113	1.0	1.00	0.00	1.70	1.10	1.22
114	1.0	0.98	0.02	1.73	1.09	1.22
115	1.0	1.03	-0.03	1.73	1.09	1.22
116	1.0	0.98	0.02	1.72	1.09	1.22
117	1.0	1.01	-0.01	1.73	1.09	1.22
118	1.0	0.99	0.01	1.72	1.09	1.22
119	1.0	1.00	-0.00	1.72	1.09	1.22
120	1.0	1.00	0.00	1.72	1.09	1.22
121	1.0	1.00	-0.00	1.72	1.09	1.22
122	1.0	1.00	0.00	1.72	1.09	1.22
123	1.0	1.00	-0.00	1.72	1.09	1.22
124	1.0	1.00	0.00	1.72	1.09	1.22
125	1.0	1.05	-0.05	1.72	6.56	4.40
126	1.0	0.99	0.01	1.66	1.15	1.28
127	1.0	0.98	0.02	1.69	1.15	1.28
128	1.0	1.02	-0.02	1.69	1.15	1.28
129	1.0	0.98	0.02	1.68	1.15	1.28

TABELA DO EXEMPLO 4.4.3 - SEM RETENCAO DE PARAMETROS						
k	r(k)	y(k)	e(k)	u(k)	A1	B1
0	0.0	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
1	0.5	0.00	0.50	0.00	0.00	0.00
2	1.0	0.00	1.00	0.75	0.00	0.00
3	1.0	0.75	0.25	1.90	0.00	1.00
4	1.0	1.22	-0.22	2.02	0.90	1.00
5	1.0	0.92	0.08	1.83	0.90	1.00
6	1.0	1.01	-0.01	1.92	0.90	1.00
7	1.0	1.01	-0.01	1.90	0.90	1.00
8	1.0	0.98	0.02	1.90	0.90	1.00
9	1.0	1.01	-0.01	1.90	0.90	1.00
10	1.0	0.99	0.01	1.90	0.90	1.00
11	1.0	1.00	-0.00	1.90	0.90	1.00
12	1.0	1.00	0.00	1.90	0.90	1.00
13	1.0	1.00	-0.00	1.90	0.90	1.00
14	1.0	1.00	0.00	1.90	0.90	1.00
15	1.0	1.00	-0.00	1.90	0.90	1.00
16	1.0	1.00	0.00	1.90	0.90	1.00
17	1.0	1.00	-0.00	1.90	0.90	1.00
18	1.0	1.00	0.00	1.90	0.90	1.00
19	1.0	1.00	-0.00	1.90	0.90	1.00
20	1.0	1.00	0.00	1.90	0.90	1.00
21	1.0	1.00	-0.00	1.90	0.90	1.00
22	1.0	1.00	0.00	1.90	0.90	1.00
23	1.0	1.00	-0.00	1.90	0.90	1.00
24	1.0	1.00	0.00	1.90	0.90	1.00
25	1.0	1.00	-0.00	1.90	0.90	1.00
26	1.0	1.00	0.00	1.90	0.90	1.00
27	1.0	1.00	-0.00	1.90	0.90	1.00
28	1.0	1.00	0.00	1.90	0.90	1.00
29	1.0	1.00	-0.00	1.90	0.90	1.00
30	1.0	1.00	0.00	1.90	0.90	1.00
31	1.0	1.00	-0.00	1.90	0.90	1.00
32	1.0	1.00	0.00	1.90	0.90	1.00
33	1.0	1.00	-0.00	1.90	0.90	1.00
34	1.0	1.00	0.00	1.90	0.90	1.00
35	1.0	1.00	-0.00	1.90	0.90	1.00
36	1.0	1.00	0.00	1.90	0.90	1.00
37	1.0	1.00	-0.00	1.90	0.90	1.00
38	1.0	1.00	0.00	1.90	0.90	1.00
39	1.0	1.00	-0.00	1.90	0.90	1.00
40	1.0	1.00	0.00	1.90	0.90	1.00
41	1.0	1.00	-0.00	1.90	0.90	1.00
42	1.0	1.00	0.00	1.90	0.90	1.00
43	1.0	1.00	-0.00	1.90	0.90	1.00
44	1.0	1.00	0.00	1.90	0.90	1.00
45	1.0	1.00	-0.00	1.90	0.90	1.00
46	1.0	1.00	0.00	1.90	0.90	1.00
47	1.0	1.00	-0.00	1.90	0.90	1.00
48	1.0	1.00	0.00	1.90	0.90	1.00
49	1.0	1.00	-0.00	1.90	0.90	1.00
50	1.0	1.00	0.00	1.90	0.90	1.00
51	1.0	1.00	-0.00	1.90	0.90	1.00

TABELA DO EXEMPLO 4.4.3 - SEM RETENCAO DE PARAMETROS

k	r(k)	y(k)	e(k)	u(k)	A1	B1
52	1.0	1.00	0.00	1.90	0.90	1.00
53	1.0	1.00	-0.00	1.90	0.90	1.00
54	1.0	1.00	0.00	1.90	0.90	1.00
55	1.0	1.00	0.00	1.90	0.90	1.00
56	1.0	1.00	0.00	1.90	0.90	1.00
57	1.0	1.00	0.00	1.90	0.90	1.00
58	1.0	1.00	0.00	1.90	0.90	1.00
59	1.0	1.00	0.00	1.90	0.90	1.00
60	1.0	1.00	-0.00	1.90	0.90	1.00
61	1.0	1.00	0.00	1.90	0.90	1.00
62	1.0	1.00	0.00	1.90	0.90	1.00
63	1.0	1.00	0.00	1.90	0.90	1.00
64	1.0	1.00	0.00	1.90	0.90	1.00
65	1.0	1.00	0.00	1.90	0.90	1.00
66	1.0	1.00	0.00	1.90	0.90	1.00
67	1.0	1.00	0.00	1.90	0.90	1.00
68	1.0	1.00	0.00	1.90	0.90	1.00
69	1.0	1.00	-0.00	1.90	0.90	1.00
70	1.0	1.00	0.00	1.90	0.90	1.00
71	1.0	1.00	0.00	1.90	0.90	1.00
72	1.0	1.00	0.00	1.90	0.90	1.00
73	1.0	1.05	-0.05	1.90	0.89	1.01
74	1.0	1.00	-0.00	1.83	0.94	1.05
75	1.0	0.97	0.03	1.86	0.94	1.05
76	1.0	1.03	-0.03	1.86	0.94	1.05
77	1.0	0.98	0.02	1.85	0.94	1.05
78	1.0	1.02	-0.02	1.86	0.94	1.05
79	1.0	0.99	0.01	1.85	0.94	1.05
80	1.0	1.01	-0.01	1.85	0.94	1.05
81	1.0	1.00	0.00	1.85	0.94	1.05
82	1.0	1.00	-0.00	1.85	0.94	1.05
83	1.0	1.00	0.00	1.85	0.94	1.05
84	1.0	1.00	-0.00	1.85	0.94	1.05
85	1.0	1.00	0.00	1.85	0.94	1.05
86	1.0	1.05	-0.05	1.85	7.68	4.70
87	1.0	1.00	-0.00	1.37	1.00	1.11
88	1.0	0.52	0.48	1.89	0.99	1.10
89	1.0	1.57	-0.57	1.91	0.99	1.10
90	1.0	0.55	0.45	1.67	0.99	1.10
91	1.0	1.30	-0.30	1.91	0.99	1.10
92	1.0	0.82	0.18	1.74	0.99	1.10
93	1.0	1.10	-0.10	1.85	0.99	1.10
94	1.0	0.95	0.05	1.78	0.99	1.10
95	1.0	1.03	-0.03	1.82	0.99	1.10
96	1.0	0.99	0.01	1.80	0.99	1.10
97	1.0	1.01	-0.01	1.81	0.99	1.10
98	1.0	1.00	0.00	1.81	0.99	1.10
99	1.0	1.05	-0.05	1.81	7.52	4.73
100	1.0	1.00	0.00	1.33	1.05	1.16
101	1.0	0.50	0.50	1.83	1.04	1.16
102	1.0	1.60	-0.60	1.89	1.04	1.16
103	1.0	0.52	0.48	1.61	1.04	1.16

TABELA DO EXEMPLO

## 4.4.3 - SEM RETENÇÃO DE PARÂMETROS

k	r(k)	y(k)	e(k)	u(k)	A1	B1
104	1.0	1.32	-0.32	1.88	1.04	1.16
105	1.0	0.81	0.19	1.68	1.04	1.16
106	1.0	1.11	-0.11	1.81	1.04	1.16
107	1.0	0.94	0.06	1.74	1.04	1.16
108	1.0	1.03	-0.03	1.78	1.04	1.16
109	1.0	0.99	0.01	1.76	1.04	1.16
110	1.0	1.01	-0.01	1.77	1.04	1.16
111	1.0	1.00	0.00	1.76	1.04	1.16
112	1.0	1.05	-0.05	1.76	7.36	4.76
113	1.0	0.99	0.01	1.31	1.10	1.22
114	1.0	0.50	0.50	1.76	1.09	1.22
115	1.0	1.59	-0.59	1.87	1.09	1.22
116	1.0	0.53	0.47	1.56	1.09	1.22
117	1.0	1.31	-0.31	1.85	1.09	1.22
118	1.0	0.81	0.19	1.64	1.09	1.22
119	1.0	1.11	-0.11	1.77	1.09	1.22
120	1.0	0.94	0.06	1.70	1.09	1.22
121	1.0	1.03	-0.03	1.74	1.09	1.22
122	1.0	0.99	0.01	1.72	1.09	1.22
123	1.0	1.01	-0.01	1.73	1.09	1.22
124	1.0	1.00	0.00	1.72	1.09	1.22
125	1.0	1.05	-0.05	1.72	7.59	5.01
126	1.0	0.99	0.01	1.26	1.15	1.28
127	1.0	0.47	0.53	1.70	1.15	1.28
128	1.0	1.64	-0.64	1.86	1.15	1.28
129	1.0	0.49	0.51	1.49	1.15	1.28

TABELA DO EXEMPLO 4.4.4 - COM RETENÇÃO DOS PARÂMETROS

k	r(k)	y(k)	e(k)	u(k)	A1	A2	B1	B2
0	0.0	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
1	0.3	0.00	0.30	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
2	0.6	0.00	0.60	0.19	0.00	0.00	0.00	0.00
3	0.9	0.38	0.52	0.60	0.00	0.00	2.00	0.00
4	1.0	0.71	0.29	0.98	1.04	0.00	2.00	-0.52
5	1.0	0.97	0.03	1.19	1.07	-0.13	2.00	-0.45
6	1.0	1.04	-0.04	1.22	1.79	0.80	2.00	0.99
7	1.0	0.98	0.02	1.20	1.80	0.81	2.00	1.00
8	1.0	1.00	-0.00	1.20	1.80	0.81	2.00	1.00
9	1.0	1.00	-0.00	1.20	1.80	0.81	2.00	1.00
10	1.0	1.00	0.00	1.20	1.80	0.81	2.00	1.00
11	1.0	1.00	-0.00	1.20	1.80	0.81	2.00	1.00
12	1.0	1.00	0.00	1.20	1.80	0.81	2.00	1.00
13	1.0	1.00	-0.00	1.20	1.80	0.81	2.00	1.00
14	1.0	1.00	0.00	1.20	1.80	0.81	2.00	1.00
15	1.0	1.00	-0.00	1.20	1.80	0.81	2.00	1.00
16	1.0	1.00	0.00	1.20	1.80	0.81	2.00	1.00
17	1.0	1.00	-0.00	1.20	1.80	0.81	2.00	1.00
18	1.0	1.00	0.00	1.20	1.80	0.81	2.00	1.00
19	1.0	1.00	0.00	1.20	1.80	0.81	2.00	1.00
20	1.0	1.00	-0.00	1.20	1.80	0.81	2.00	1.00
21	1.0	1.00	0.00	1.20	1.80	0.81	2.00	1.00
22	1.0	1.00	-0.00	1.20	1.80	0.81	2.00	1.00
23	1.0	1.00	0.00	1.20	1.80	0.81	2.00	1.00
24	1.0	1.00	-0.00	1.20	1.80	0.81	2.00	1.00
25	1.0	1.00	0.00	1.20	1.80	0.81	2.00	1.00
26	1.0	1.00	-0.00	1.20	1.80	0.81	2.00	1.00
27	1.0	1.00	0.00	1.20	1.80	0.81	2.00	1.00
28	1.0	1.00	-0.00	1.20	1.80	0.81	2.00	1.00
29	1.0	1.00	0.00	1.20	1.80	0.81	2.00	1.00
30	1.0	1.00	-0.00	1.20	1.80	0.81	2.00	1.00
31	1.0	1.00	0.00	1.20	1.80	0.81	2.00	1.00
32	1.0	1.00	-0.00	1.20	1.80	0.81	2.00	1.00
33	1.0	1.00	0.00	1.20	1.80	0.81	2.00	1.00
34	1.0	1.00	-0.00	1.20	1.80	0.81	2.00	1.00
35	1.0	1.00	0.00	1.20	1.80	0.81	2.00	1.00
36	1.0	1.00	-0.00	1.20	1.80	0.81	2.00	1.00
37	1.0	1.00	0.00	1.20	1.80	0.81	2.00	1.00
38	1.0	1.00	-0.00	1.20	1.80	0.81	2.00	1.00
39	1.0	1.00	0.00	1.20	1.80	0.81	2.00	1.00
40	1.0	1.00	0.00	1.20	1.80	0.81	2.00	1.00
41	1.0	1.00	-0.00	1.20	1.80	0.81	2.00	1.00
42	1.0	1.00	0.00	1.20	1.80	0.81	2.00	1.00
43	1.0	1.00	-0.00	1.20	1.80	0.81	2.00	1.00
44	1.0	1.00	0.00	1.20	1.80	0.81	2.00	1.00
45	1.0	1.00	-0.00	1.20	1.80	0.81	2.00	1.00
46	1.0	1.00	0.00	1.20	1.80	0.81	2.00	1.00
47	1.0	1.00	-0.00	1.20	1.80	0.81	2.00	1.00
48	1.0	1.00	0.00	1.20	1.80	0.81	2.00	1.00
49	1.0	1.00	-0.00	1.20	1.80	0.81	2.00	1.00
50	1.0	1.00	0.00	1.20	1.80	0.81	2.00	1.00
51	1.0	1.00	0.00	1.20	1.80	0.81	2.00	1.00

TABELA DO EXEMPLO 4.4.4 - COM RETENÇÃO DOS PARÂMETROS

k	r(k)	y(k)	e(k)	u(k)	A1	A2	B1	B2
52	1.0	1.00	0.00	1.20	1.80	0.81	2.00	1.00
53	1.0	1.00	0.00	1.20	1.80	0.81	2.00	1.00
54	1.0	1.00	-0.00	1.20	1.80	0.81	2.00	1.00
55	1.0	1.00	0.00	1.20	1.80	0.81	2.00	1.00
56	1.0	1.00	-0.00	1.20	1.80	0.81	2.00	1.00
57	1.0	1.00	0.00	1.20	1.80	0.81	2.00	1.00
58	1.0	1.00	-0.00	1.20	1.80	0.81	2.00	1.00
59	1.0	1.00	0.00	1.20	1.80	0.81	2.00	1.00
60	1.0	1.00	-0.00	1.20	1.80	0.81	2.00	1.00
61	1.0	1.00	-0.00	1.20	1.80	0.81	2.00	1.00
62	1.0	1.00	0.00	1.20	1.80	0.81	2.00	1.00
63	1.0	1.00	0.00	1.20	1.80	0.81	2.00	1.00
64	1.0	1.00	-0.00	1.20	1.80	0.81	2.00	1.00
65	1.0	1.00	0.00	1.20	1.80	0.81	2.00	1.00
66	1.0	1.00	-0.00	1.20	1.80	0.81	2.00	1.00
67	1.0	1.00	0.00	1.20	1.80	0.81	2.00	1.00
68	1.0	1.00	-0.00	1.20	1.80	0.81	2.00	1.00
69	1.0	1.00	0.00	1.20	1.80	0.81	2.00	1.00
70	1.0	1.00	-0.00	1.20	1.80	0.81	2.00	1.00
71	1.0	1.00	0.00	1.20	1.80	0.81	2.00	1.00
72	1.0	1.00	-0.00	1.20	1.80	0.81	2.00	1.00
73	1.0	1.00	0.00	1.20	1.80	0.81	2.00	1.00
74	1.0	1.00	-0.00	1.20	1.80	0.81	2.00	1.00
75	1.0	1.00	0.00	1.20	1.80	0.81	2.00	1.00
76	1.0	1.00	-0.00	1.20	1.80	0.81	2.00	1.00
77	1.0	1.00	0.00	1.20	1.80	0.81	2.00	1.00
78	1.0	1.00	-0.00	1.20	1.80	0.81	2.00	1.00
79	1.0	1.05	-0.05	1.20	1.80	0.81	2.00	1.00
80	1.0	0.96	0.04	1.17	1.22	0.95	1.83	0.83
81	1.0	1.02	-0.02	1.20	1.39	0.33	1.44	0.84
82	1.0	0.99	0.01	1.19	1.89	0.85	2.10	1.05
83	1.0	1.00	-0.00	1.19	1.89	0.85	2.10	1.05
84	1.0	1.00	-0.00	1.19	1.89	0.85	2.10	1.05
85	1.0	1.00	0.00	1.19	1.89	0.85	2.10	1.05
86	1.0	1.00	-0.00	1.19	1.89	0.85	2.10	1.05
87	1.0	1.00	0.00	1.19	1.89	0.85	2.10	1.05
88	1.0	1.00	-0.00	1.19	1.89	0.85	2.10	1.05
89	1.0	1.00	0.00	1.19	1.89	0.85	2.10	1.05
90	1.0	1.00	-0.00	1.19	1.89	0.85	2.10	1.05
91	1.0	1.00	0.00	1.19	1.89	0.85	2.10	1.05
92	1.0	1.00	-0.00	1.19	1.89	0.85	2.10	1.05
93	1.0	1.00	0.00	1.19	1.89	0.85	2.10	1.05
94	1.0	1.00	-0.00	1.19	1.89	0.85	2.10	1.05
95	1.0	1.00	0.00	1.19	1.89	0.85	2.10	1.05
96	1.0	1.00	-0.00	1.19	1.89	0.85	2.10	1.05
97	1.0	1.00	0.00	1.19	1.89	0.85	2.10	1.05
98	1.0	1.05	-0.05	1.19	2.13	0.34	2.36	0.57
99	1.0	0.95	0.05	1.16	1.32	0.60	2.20	0.27
100	1.0	1.03	-0.03	1.18	1.48	-0.08	2.18	-0.14
101	1.0	0.98	0.02	1.17	1.98	0.86	2.24	1.03
102	1.0	1.01	-0.01	1.17	1.98	0.89	2.21	1.10
103	1.0	1.00	0.00	1.17	1.98	0.89	2.21	1.10

## TABELA DO EXEMPLO

## 4.4.4 - COM RETENCAO DOS PARAMETROS

k	r(k)	y(k)	e(k)	u(k)	A1	A2	B1	B2
104	1.0	1.00	-0.00	1.20	1.98	0.89	2.21	1.10
105	1.0	1.06	-0.06	1.17	1.98	0.89	2.21	1.10
106	1.0	0.90	0.10	1.15	1.98	0.89	2.20	1.10
107	1.0	1.09	-0.09	1.19	1.98	0.89	2.20	1.10
108	1.0	0.93	0.07	1.16	1.98	0.89	2.20	1.10
109	1.0	1.04	-0.04	1.18	1.98	0.89	2.20	1.10
110	1.0	0.97	0.03	1.17	1.98	0.89	2.20	1.10
111	1.0	1.01	0.01	1.17	1.98	0.89	2.20	1.10
112	1.0	0.99	0.01	1.17	1.98	0.89	2.20	1.10
113	1.0	1.00	-0.00	1.17	1.98	0.89	2.20	1.10
114	1.0	1.00	0.00	1.17	1.98	0.89	2.20	1.10
115	1.0	1.00	-0.00	1.17	1.98	0.89	2.20	1.10
116	1.0	1.00	0.00	1.17	1.98	0.89	2.20	1.10
117	1.0	1.05	-0.05	1.17	0.83	0.23	6.68	-4.92
118	1.0	0.95	0.05	1.14	1.34	6.44	16.95	-9.46
119	1.0	1.04	-0.04	1.17	1.52	-6.46	12.32	-15.66
120	1.0	0.97	0.03	1.15	2.01	0.32	2.95	-0.08
121	1.0	1.02	-0.02	1.16	2.07	0.89	2.35	1.07
122	1.0	0.99	0.01	1.16	2.09	0.94	2.32	1.15
123	1.0	1.01	-0.01	1.16	2.09	0.94	2.32	1.16
124	1.0	1.00	0.00	1.16	2.09	0.94	2.32	1.16
125	1.0	1.00	-0.00	1.16	2.09	0.94	2.32	1.16
126	1.0	1.00	0.00	1.16	2.09	0.94	2.32	1.16
127	1.0	1.00	-0.00	1.16	2.09	0.94	2.32	1.16
128	1.0	1.00	0.00	1.16	2.09	0.94	2.32	1.16
129	1.0	1.00	-0.00	1.16	2.09	0.94	2.32	1.16
130	1.0	1.00	0.00	1.16	2.09	0.94	2.32	1.16
131	1.0	1.00	-0.00	1.16	2.09	0.94	2.32	1.16
132	1.0	1.00	0.00	1.16	2.09	0.94	2.32	1.16
133	1.0	1.00	-0.00	1.16	2.09	0.94	2.32	1.16
134	1.0	1.00	0.00	1.16	2.09	0.94	2.32	1.16
135	1.0	1.00	-0.00	1.16	2.09	0.94	2.32	1.16
136	1.0	1.05	-0.05	1.16	1.95	1.27	2.07	1.58
137	1.0	0.94	0.06	1.12	1.52	1.35	1.88	1.48
138	1.0	1.05	-0.05	1.16	1.69	0.74	1.16	1.83
139	1.0	0.96	0.04	1.13	2.19	1.01	2.41	1.26
140	1.0	1.03	-0.03	1.15	2.19	0.99	2.43	1.22
141	1.0	0.98	0.02	1.14	2.19	0.98	2.43	1.22
142	1.0	1.01	-0.01	1.15	2.19	0.98	2.43	1.22
143	1.0	0.99	0.01	1.14	2.19	0.98	2.43	1.22
144	1.0	1.01	-0.01	1.15	2.19	0.98	2.43	1.22
145	1.0	1.00	0.00	1.14	2.19	0.98	2.43	1.22
146	1.0	1.00	-0.00	1.14	2.19	0.98	2.43	1.22
147	1.0	1.00	0.00	1.14	2.19	0.98	2.43	1.22
148	1.0	1.00	-0.00	1.14	2.19	0.98	2.43	1.22
149	1.0	1.00	0.00	1.14	2.19	0.98	2.43	1.22
150	1.0	1.00	-0.00	1.14	2.19	0.98	2.43	1.22

TABELA DO EXEMPLO

## 4.4.4 - SEM RETENCAO DOS PARAMETROS

k	r(k)	y(k)	e(k)	u(k)	A1	A2	B1	B2
0	0.0	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
1	0.3	0.00	0.30	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
2	0.6	0.00	0.60	0.19	0.00	0.00	0.00	0.00
3	0.9	0.38	0.52	0.60	0.00	0.00	2.00	0.00
4	1.0	0.71	0.29	0.98	1.04	0.00	2.00	-0.52
5	1.0	0.97	0.03	1.19	1.07	-0.13	2.00	-0.45
6	1.0	1.04	-0.04	1.22	1.79	0.80	2.00	0.99
7	1.0	0.98	0.02	1.20	1.80	0.81	2.00	1.00
8	1.0	1.00	-0.00	1.20	1.80	0.81	2.00	1.00
9	1.0	1.00	-0.00	1.20	1.80	0.81	2.00	1.00
10	1.0	1.00	0.00	1.20	1.80	0.81	2.00	1.00
11	1.0	1.00	-0.00	1.20	1.80	0.81	2.00	1.00
12	1.0	1.00	0.00	1.20	1.80	0.81	2.00	1.00
13	1.0	1.00	-0.00	1.20	1.80	0.81	2.00	1.00
14	1.0	1.00	0.00	1.20	1.80	0.81	2.00	1.00
15	1.0	1.00	-0.00	1.20	1.80	0.81	2.00	1.00
16	1.0	1.00	0.00	1.20	1.80	0.81	2.00	1.00
17	1.0	1.00	-0.00	1.20	1.80	0.81	2.00	1.00
18	1.0	1.00	0.00	1.20	1.80	0.81	2.00	1.00
19	1.0	1.00	0.00	1.20	1.80	0.81	2.00	1.00
20	1.0	1.00	-0.00	1.20	1.80	0.81	2.00	1.00
21	1.0	1.00	0.00	1.20	1.80	0.81	2.00	1.00
22	1.0	1.00	-0.00	1.20	1.80	0.81	2.00	1.00
23	1.0	1.00	0.00	1.20	1.80	0.81	2.00	1.00
24	1.0	1.00	-0.00	1.20	1.80	0.81	2.00	1.00
25	1.0	1.00	0.00	1.20	1.80	0.81	2.00	1.00
26	1.0	1.00	-0.00	1.20	1.80	0.81	2.00	1.00
27	1.0	1.00	0.00	1.20	1.80	0.81	2.00	1.00
28	1.0	1.00	-0.00	1.20	1.80	0.81	2.00	1.00
29	1.0	1.00	0.00	1.20	1.80	0.81	2.00	1.00
30	1.0	1.00	-0.00	1.20	1.80	0.81	2.00	1.00
31	1.0	1.00	0.00	1.20	1.80	0.81	2.00	1.00
32	1.0	1.00	-0.00	1.20	1.80	0.81	2.00	1.00
33	1.0	1.00	0.00	1.20	1.80	0.81	2.00	1.00
34	1.0	1.00	-0.00	1.20	1.80	0.81	2.00	1.00
35	1.0	1.00	0.00	1.20	1.80	0.81	2.00	1.00
36	1.0	1.00	-0.00	1.20	1.80	0.81	2.00	1.00
37	1.0	1.00	0.00	1.20	1.80	0.81	2.00	1.00
38	1.0	1.00	-0.00	1.20	1.80	0.81	2.00	1.00
39	1.0	1.00	0.00	1.20	1.80	0.81	2.00	1.00
40	1.0	1.00	0.00	1.20	1.80	0.81	2.00	1.00
41	1.0	1.00	-0.00	1.20	1.80	0.81	2.00	1.00
42	1.0	1.00	0.00	1.20	1.80	0.81	2.00	1.00
43	1.0	1.00	-0.00	1.20	1.80	0.81	2.00	1.00
44	1.0	1.00	0.00	1.20	1.80	0.81	2.00	1.00
45	1.0	1.00	-0.00	1.20	1.80	0.81	2.00	1.00
46	1.0	1.00	0.00	1.20	1.80	0.81	2.00	1.00
47	1.0	1.00	-0.00	1.20	1.80	0.81	2.00	1.00
48	1.0	1.00	0.00	1.20	1.80	0.81	2.00	1.00
49	1.0	1.00	-0.00	1.20	1.80	0.81	2.00	1.00
50	1.0	1.00	0.00	1.20	1.80	0.81	2.00	1.00
51	1.0	1.00	0.00	1.20	1.80	0.81	2.00	1.00



TABELA DO EXEMPLO 4.4.4 - SEM RETENCAO DOS PARAMETROS

k	r(k)	y(k)	e(k)	u(k)	A1	A2	B1	B2
52	1.0	1.00	0.00	1.20	1.80	0.81	2.00	1.00
53	1.0	1.00	0.00	1.20	1.80	0.81	2.00	1.00
54	1.0	1.00	-0.00	1.20	1.80	0.81	2.00	1.00
55	1.0	1.00	0.00	1.20	1.80	0.81	2.00	1.00
56	1.0	1.00	-0.00	1.20	1.80	0.81	2.00	1.00
57	1.0	1.00	0.00	1.20	1.80	0.81	2.00	1.00
58	1.0	1.00	-0.00	1.20	1.80	0.81	2.00	1.00
59	1.0	1.00	0.00	1.20	1.80	0.81	2.00	1.00
60	1.0	1.00	-0.00	1.20	1.80	0.81	2.00	1.00
61	1.0	1.00	-0.00	1.20	1.80	0.81	2.00	1.00
62	1.0	1.00	0.00	1.20	1.80	0.81	2.00	1.00
63	1.0	1.00	0.00	1.20	1.80	0.81	2.00	1.00
64	1.0	1.00	-0.00	1.20	1.80	0.81	2.00	1.00
65	1.0	1.00	0.00	1.20	1.80	0.81	2.00	1.00
66	1.0	1.00	-0.00	1.20	1.80	0.81	2.00	1.00
67	1.0	1.00	0.00	1.20	1.80	0.81	2.00	1.00
68	1.0	1.00	-0.00	1.20	1.80	0.81	2.00	1.00
69	1.0	1.00	0.00	1.20	1.80	0.81	2.00	1.00
70	1.0	1.00	-0.00	1.20	1.80	0.81	2.00	1.00
71	1.0	1.00	0.00	1.20	1.80	0.81	2.00	1.00
72	1.0	1.00	-0.00	1.20	1.80	0.81	2.00	1.00
73	1.0	1.00	0.00	1.20	1.80	0.81	2.00	1.00
74	1.0	1.00	-0.00	1.20	1.80	0.81	2.00	1.00
75	1.0	1.00	0.00	1.20	1.80	0.81	2.00	1.00
76	1.0	1.00	-0.00	1.20	1.80	0.81	2.00	1.00
77	1.0	1.00	0.00	1.20	1.80	0.81	2.00	1.00
78	1.0	1.00	-0.00	1.20	1.80	0.81	2.00	1.00
79	1.0	1.05	-0.05	1.20	1.80	0.81	2.00	1.00
80	1.0	0.96	0.04	1.17	1.22	0.95	1.83	0.83
81	1.0	1.02	-0.02	1.21	1.39	0.33	1.44	0.84
82	1.0	1.02	-0.02	1.18	1.89	0.85	2.10	1.05
83	1.0	0.96	0.04	1.18	1.89	0.85	2.10	1.05
84	1.0	1.05	-0.05	1.20	1.89	0.85	2.10	1.05
85	1.0	0.96	0.04	1.18	1.89	0.85	2.10	1.05
86	1.0	1.02	-0.02	1.19	1.89	0.85	2.10	1.05
87	1.0	0.98	0.02	1.19	1.89	0.85	2.10	1.05
88	1.0	1.01	-0.01	1.19	1.89	0.85	2.10	1.05
89	1.0	1.00	0.00	1.19	1.89	0.85	2.10	1.05
90	1.0	1.00	-0.00	1.19	1.89	0.85	2.10	1.05
91	1.0	1.00	0.00	1.19	1.89	0.85	2.10	1.05
92	1.0	1.00	-0.00	1.19	1.89	0.85	2.10	1.05
93	1.0	1.00	0.00	1.19	1.89	0.85	2.10	1.05
94	1.0	1.00	-0.00	1.19	1.89	0.85	2.10	1.05
95	1.0	1.00	0.00	1.19	1.89	0.85	2.10	1.05
96	1.0	1.00	-0.00	1.19	1.89	0.85	2.10	1.05
97	1.0	1.00	0.00	1.19	1.89	0.85	2.10	1.05
98	1.0	1.05	-0.05	1.19	2.59	-1.20	3.94	-1.92
99	1.0	0.95	0.05	1.08	1.31	-0.53	3.96	-2.44
100	1.0	0.86	0.14	1.24	1.48	-3.39	3.69	-4.43
101	1.0	1.37	-0.37	-2.34	1.97	0.87	2.21	1.07
102	1.0	-7.28	8.28	1.19	1.98	0.89	2.20	1.10
103	1.0	13.26	-12.26	3.66	1.98	0.89	2.21	1.10

TABELA DO EXEMPLO		4.4.4 - SEM RETENÇÃO DOS PARÂMETROS							
k	r(k)	y(k)	e(k)	u(k)	A1	A2	B1	B2	
104	1.0	-10.43	11.43	-3.80	1.98	0.89	2.20	1.10	
105	1.0	4.52	-3.52	3.09	1.98	0.89	2.20	1.10	
106	1.0	2.97	-1.97	1.72	1.98	0.89	2.20	1.10	
107	1.0	-2.74	3.74	-0.12	1.98	0.89	2.20	1.10	
108	1.0	4.41	-3.41	2.27	1.98	0.89	2.20	1.10	
109	1.0	-1.44	2.44	0.50	1.98	0.89	2.20	1.10	
110	1.0	2.52	-1.52	1.50	1.98	0.89	2.20	1.10	
111	1.0	0.14	0.86	1.06	1.98	0.89	2.20	1.10	
112	1.0	1.46	-0.46	1.19	1.98	0.89	2.20	1.10	
113	1.0	0.77	0.23	1.19	1.98	0.89	2.20	1.10	
114	1.0	1.11	-0.11	1.15	1.98	0.89	2.20	1.10	
115	1.0	0.95	0.05	1.20	1.98	0.89	2.20	1.10	
116	1.0	1.02	-0.02	1.16	1.98	0.89	2.20	1.10	
117	1.0	1.04	-0.04	1.18	-5.93	-3.51	-5.50	-1.69	
118	1.0	0.95	0.05	1.66	1.01	0.01	-0.03	1.78	
119	1.0	2.26	-1.26	0.65	1.72	1.18	2.41	0.95	
120	1.0	-2.16	3.16	1.35	2.08	0.94	2.32	1.16	
121	1.0	6.26	-5.26	2.15	2.08	0.94	2.32	1.16	
122	1.0	-4.47	5.47	-0.24	2.08	0.94	2.32	1.16	
123	1.0	5.39	-4.39	2.30	2.08	0.94	2.32	1.16	
124	1.0	-2.00	3.00	0.46	2.08	0.94	2.32	1.16	
125	1.0	2.84	-1.84	1.50	2.08	0.94	2.32	1.16	
126	1.0	-0.04	1.04	1.04	2.08	0.94	2.32	1.16	
127	1.0	1.55	-0.55	1.17	2.08	0.94	2.32	1.16	
128	1.0	0.72	0.28	1.18	2.08	0.94	2.32	1.16	
129	1.0	1.13	-0.13	1.13	2.08	0.94	2.32	1.16	
130	1.0	0.94	0.06	1.18	2.08	0.94	2.32	1.16	
131	1.0	1.03	-0.03	1.14	2.08	0.94	2.32	1.16	
132	1.0	0.99	0.01	1.17	2.08	0.94	2.32	1.16	
133	1.0	1.00	-0.00	1.15	2.08	0.94	2.32	1.16	
134	1.0	1.00	0.00	1.16	2.08	0.94	2.32	1.16	
135	1.0	1.00	-0.00	1.16	2.08	0.94	2.32	1.16	
136	1.0	1.05	-0.05	1.16	3.04	-0.22	0.75	2.55	
137	1.0	0.94	0.06	4.05	1.29	-11.89	-11.12	2.85	
138	1.0	8.17	-7.17	-0.90	1.73	4.45	2.50	3.72	
139	1.0	-16.06	17.06	11.39	2.19	0.99	2.43	1.23	
140	1.0	53.70	-52.70	9.43	2.19	0.98	2.43	1.22	
141	1.0	-64.91	65.91	-17.28	2.19	0.98	2.43	1.22	
142	1.0	58.59	-57.59	18.49	2.19	0.98	2.43	1.22	
143	1.0	-40.34	41.34	-10.65	2.19	0.98	2.43	1.22	
144	1.0	27.15	-26.15	7.62	2.19	0.98	2.43	1.22	
145	1.0	-14.12	15.12	-1.75	2.19	0.98	2.43	1.22	
146	1.0	9.15	-8.15	2.10	2.19	0.98	2.43	1.22	
147	1.0	-3.15	4.15	1.06	2.19	0.98	2.43	1.22	
148	1.0	3.01	-2.01	0.93	2.19	0.98	2.43	1.22	
149	1.0	0.07	0.93	1.40	2.19	0.98	2.43	1.22	
150	1.0	1.41	-0.41	0.94	2.19	0.98	2.43	1.22	

## REFERENCIAS BIBLIOGRAFICAS

- 1 - LIVRAMENTO, C. A., "Controle Digital-Analógico para Rastreamento Robusto e Rápido entre Amostragens", Tese de Mestrado, 1979, UFSC.
- 2 - NARENDRA, K. S.; VALAVANI, L. S. , "Direct and Indirect Model Reference Adaptive Control", Automatica, Vol. 15, pp. 653-664, 1979.
- 3 - ASTROM, K. J.; WITTENMARK, "On self-tuning regulators", Automatica, 9, 185-199, 1973.
- 4 - SOH, C. B. , "Robust Stability of Discrete-Time Systems Using Delta Operators", IEEE Transactions on Automatic Control, Vol. 36, NO. 3, March 1991.
- 5 - AMILLO, J.; MATA, F. A. , "Robust Stabilization of Systems with Multiple Real Pole Uncertainties", IEEE Transactions on Automatic Control, Vol. 36, NO. 6, June 1991.
- 6 - EDGARDT, BO, "Stability Analysis of Discrete-Time Adaptive Control Schemes", IEEE Transactions on Automatic Control, Vol. ac-25, NO 4, August 1980.
- 7 - JUANG, Y., "Robust Stability and Robust Pole Assignment of Linear Systems With Structured Uncertainty", IEEE Transactions on

Automatic Control, Vol. 36, NO. 5, May 1991.

8 - YAZ, E., "Robustness of Discrete-Time Systems for Unstructured Stochastic Perturbations", IEEE Transactions on Automatic Control, Vol. 36, NO. 7, July 1991.

9 - ACKERMANN, J; HU, H. Z.; KAESBAUER, D., "Robustness Analysis: A Case Study", IEEE Transactions on Automatic Control, Vol. 35, NO. 3, March 1990.

10 - PETERSEN, I. R., "A New Extension to Kharitonov's Theorem", IEEE Transactions on Automatic Control, Vol. 35, NO. 7, July 1990.

11 - SIDERIS, A.; PEÑA, R. S. S., "Robustness Margin Calculation with Dynamic and Real Parametric Uncertainty", IEEE Transactions on Automatic Control, Vol. 35, NO. 8, August 1990.

12 - CHAPPELLAT, H.; BHATTACHARYYA, S. P., "A Generalization of Kharitonov's Theorem: Robust Stability on Interval Plants", IEEE Transaction on Automatic Control, Vol. 34, NO. 3, March 1989.

13 - CHAPPELLAT, H.; DAHLEH, M.; BHATTACHARYYA, S. P., "Robust Stability Under Structured and Unstructured Perturbations", IEEE Transactions on Automatic Control, Vol. 35, NO. 10, October 1990.

14 - GIRI, F.; M'SAAD, M.; DUGARD, L.; DION, J.; "Robust Adaptive Regulation with Minimal Prior Knowledge", IEEE Transactions on Automatic Control, Vol. 37, NO. 3, March 1990.

- 15 - SMITH, R. S.; DOYLE, J. C.; "Model Validation: A Connection Between Robust Control and Identification", IEEE Transaction on Automatic Control, Vol. 37, NO. 7, July 1992.
- 16 - WAHLBERG, B., "System Identification Using Laguerre Models", IEEE Transactions on Automatic Control", Vol. 36, NO. 5, May 1991.
- 17 - KIM, J.; HONG, Y.; CHOI, K.; "Direct Model Reference Adaptive Pole Placement Control with Exponential Weighting Properties", IEEE Transactions on Automatic Control, Vol. 36, NO. 9, September 1991.
- 18 - TSAKALIS, K. S.; IOANNOU, P. A., "A New Indirect Adaptive Control Scheme for Time-Varying Plants", IEEE Transactions on Automatic Control", Vol. 35, NO. 6, June 1990.
- 19 - OGATA, K., "Engenharia de Controle Moderno", Ed. Prentice/Hall do Brasil, 1982.
- 20 - CHEN, C. T., "Linear System Theory and Design", CBS College Publishing, 1984.
- 21 - JACQUOT, R. G., "Modern Digital Control Systems", Marcel Dekker, Inc, 1981.
- 22 - LUEMBERG, D. G., "Introduction To Linear and Non Linear

Programming", Addison-Wesley Publishing Co, Inc, 1973.

23 - ÅSTRÖM, K. J.; FASOL, K. H.; JÖRGL, H. P.; GODFREY, K.; TSERMANN, R.; RAKE, H.; STREJC, V.; "Tutorials on System Identification", 5th IFAC-Symposium on Identification and System Parameter Estimation, Darmstadt, F. R. Germany, 24 - 28 September 1979.

24 - GRAUPE, D., "Identification of Systems", Robert E. Krieger Publishing Company, 1972.

25 - MESLA, J. L.; SAGE, A. P., "System Identification", Academic Press, 1971.

26 - LANDAU, Y. D., "Adaptive Control - The Model Reference Approach", Marcel Dekker, Inc, 1979.

27 - SMITH, C. L., "Digital Computer Process Control", Intext Educational Publishers, 1972.

28 - FRANKLIN, G. F.; POWELL, J. D., "Digital Control of Dynamic Systems", Addison-Wesley Publishing Company, 1980.